PHẦN 2

GIẢI TÍCH

Chương I : Hàm số.

Chương II: Tích phân .

Chương III : Hàm nhiều biến .

Chương IV : Phương trình vi phân .

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Chương I

HÀM SỐ

§1. KHÁI NIỆM VỀ HÀM SỐ

1. *Bài toán:*

Cô Hồng thuê sạp giá 30 đồng một ngày để bán vải, mỗi mét vải cô mua 5 đồng bán 7 đồng, chênh lệch 2 đồng. Cô tính nếu một ngày bán được 15m thì hoà vốn, bán được 20m thì lời 10đ , bán được 10m thì lỗ 10đ .

Nếu gọi x là số mét vải bán được , y là tiền lời thì hàm số y = 2x - 30 là *hàm lợi nhuận* của cô Hồng.

2. *Định nghĩa:*

Nếu ứng với một giá trị của x ta có một giá trị (duy nhất) của y thì ta nói y là hàm số của x, x là biến số. Kí hiệu : y = f(x)

Khi đó hàm lợi nhuận của cô Hồng ta viết y = 2x - 30 hoặc f(x) = 2x - 30

Ví dụ 1 :

Cho hàm số : $y = 4x^2 + 1$

Ta có : Nếu x = 1 thì y = 5 khi đó ta viết f(1) = 5

Tương tự ta có f(2) = 17 ; $f(a) = 4a^2 + 1$, $f(a+b) = 4 (a+b)^2 + 1$; $f(x^2) = 4x^4+1$….

3. *Tập xác định của một hàm số*

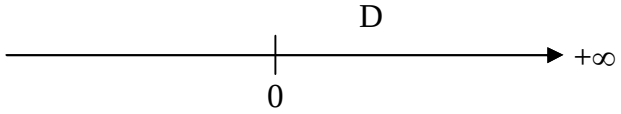
Ví dụ 2 :

a). Cho hàm số $y = 2x^2 + 30$ ta tính được y với bất cứ giá trị nào của x.

Khi đó ta nói tập xác định của hàm số này là R. Kí hiệu $D = \{x : x \in R\}$.

Đọc là :" D là tập hợp các giá trị x mà x thuộc R".

Biểu diễn bằng trục số :



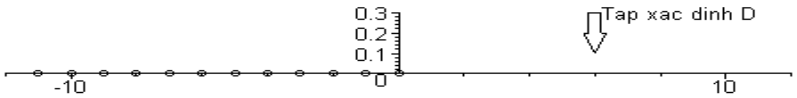
b) Cho hàm số $y = \sqrt{x}$

Ta có x =9 thì y = 3 ,

x = 0 thì y = 0,

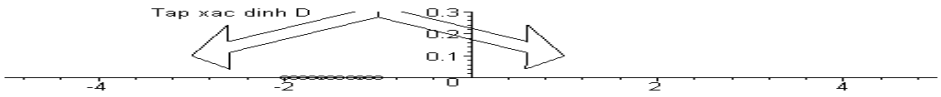
nhưng x = -5 ta không tính được y.

Do đó ta có tập xác định là $D = \{x : x \geq 0\}$.



Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Tương tự ta có tập xác định của hàm số $y = \sqrt{(x-1)(x-2)}$ là $D = \{x : x \le 1 \quad \text{hoac} \quad x \ge 2\}$



4. Vẽ đồ thị của hàm số

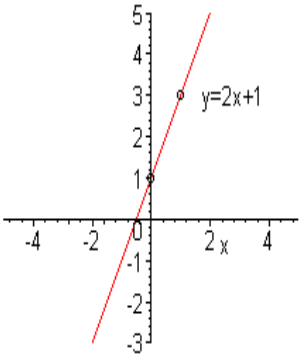
Ví dụ 3:

Vẽ đồ thị hàm số

a). y = 2x + 1 (Hình 1)

Đồ thị là 1 đường thẳng ta chỉ cần lấy 2 điểm

x	0	1
y	1	3

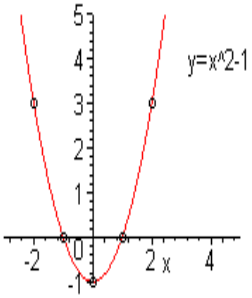


(Hình 1)

b). $y = x^2 - 1$ (Hình 2),

Đây là một parabol , ta lấy 5 điểm

x	-2	-1	0	1	2
y	3	0	-1	0	3

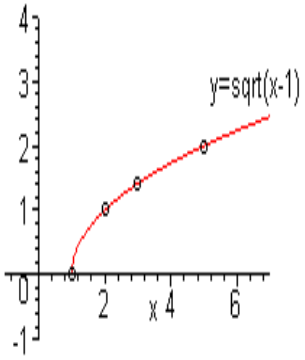


(Hình 2)

c). $y = \sqrt{x-1}$, (Hình 3)

Ta lấy 4 điểm

x	1	2	3	5
y	0	1	1,41	2



(Hình 3)

Định nghĩa : Đồ thị của hàm số y = f(x) là đường tạo bởi các điểm có hoành độ bằng x và tung độ bằng f(x).

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

5. Các phép toán trên hàm số:

Cho hai hàm số f(x) và g(x) ta có thể thực hiện các phép cộng, trừ, nhân, chia với hai hàm này .

Ví dụ :

f(x) = $x^2 - 1$ và g(x) = 2x+1 thì ta có các hàm số mới là :

(f+g)(x) = f(x)+g(x) = $x^2 - 1 + 2x + 1 = x^2 + 2x$.

(f.g)(x)= f(x).g(x) = $(x^2 - 1)(2x+1) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$…..

6. Hàm hợp:

Cô Thanh , một tiểu thương kinh doanh bằng cách mua hàng giá sỉ và bán lẻ. Biết rằng nếu t là chi phí mua hàng, q là số lượng hàng thì $q(t) = \frac{t}{4} - 10$ (t >40) và hàm lợi nhuận của cô Thanh là $P(q) = 2q - 40$. Cô tính nếu bỏ ra t = 160$ chi phí mua hàng, cô có $q = \frac{160}{4} - 10 = 30$ (đơn vị hàng hoá), tiêu thụ xong cô sẽ có lợi nhuận

$$P(30) = 2 \cdot 30 - 40 = 20\$.$$

Nếu bỏ ra 250$ chi phí mua hàng thì lợi nhuận là bao nhiêu ?. Ta có thể giúp cô tính toán nhanh hơn bằng cách lập hàm hợp *u(t).*

Đặt $u(t) = P[q(t)] = 2\left(\frac{t}{4} - 10\right) - 40 = \frac{t}{2} - 60$, đây là hàm lợi nhuận với biến số là t.

$u(160) = \frac{160}{2} - 60 = 20\$$, u(250) = $\frac{250}{2} - 60 = 65\ \$$

với $u(t) = P[q(t)]$ ta gọi u là *hàm hợp* của P và q, P là *hàm ngoài*, q là *hàm trong* .

Ví dụ 5 :

Nếu f(x) = x^3 , u(x) = 2x +1 thì ta có 2 hàm hợp sau :

$g(x) = f[u(x)] = (2x+1)^3$ có thể viết g(x) = f ∘ u(x) và

$h(x) = u[f(x)] = 2(x^3)+1$ có thể viết h(x) = u ∘ f(x)

7. Hàm ngược:

Ta nói *f(x)* và *g(x)* là hàm ngược của nhau nếu :

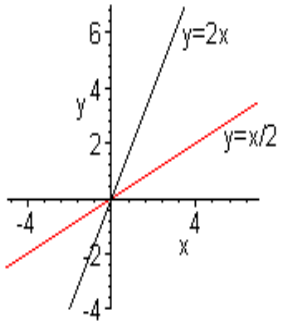
$f[g(x)] = g[f(x)] = x$ và ký hiệu là $f(x) = g^{-1}(x)$, $g(x) = f^{-1}(x)$.

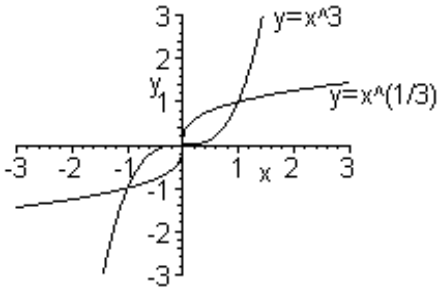
Ví dụ :

$f(x) = 2x$ thì $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$; $h(x) = x^3$ thì $h^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

Đồ thị của f(x) và $f^{-1}(x)$ đối xứng qua phân giác của phần tư góc vuông thứ nhất .

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)





Đồ thị $y = f(x) = 2x$ và $y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$ Đồ thị $y=f(x)=x^3$ và $y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

8. Ứng dụng : Hàm chi phí , hàm doanh thu, hàm lợi nhuận

Một xưởng may áo sơ mi có chi phí cố định (nhà xưởng, máy móc, ...) là 12.000 $, biến phí trên một sản phẩm (nguyên liệu, nhân công ,...) là 3 $, giá bán là p= 5 $/sp .Gọi x là số sản phẩm làm ra (giả sử là tiêu thụ hết). Tìm hàm chi phí sản xuất C(x), tìm hàm doanh thu R(x) , hàm lợi nhuận P(x), hàm chi phí sản xuất trung bình $\overline{C}(x)$.
(*C = cost = chi phí , R= revenue= doanh thu , P= profit= lợi nhuận)*

Giải:

C(x) = 12.000 + 3x ***Chi phí sản xuất bằng chi phí cố định cộng biến phí.***
R(x) = 5x ***Doanh thu bằng đơn giá bán nhân sản lượng.***
P(x) =R - C = 5x -(12.000 + 3x) = 2x - 12.000 ***Lợi nhuận bằng Doanh thu trừ Chi phí.***
$\overline{C}(x) = \frac{1}{x}(12.000 + 3x) = \frac{12.000}{x} + 3$ ***Sản lượng càng lớn chí phí sản xuất trung bình càng nhỏ***

Điểm hòa vốn : Tại đó lợi nhuận bằng 0 $P(x_0) = 0$.

9. Một số hàm sơ cấp

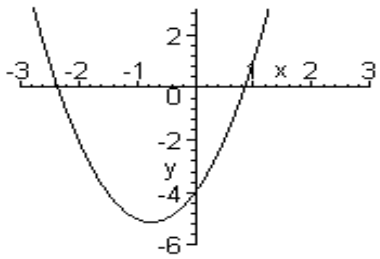
*Hàm bậc nhất y=ax+b

**** Hàm bậc hai :*** $y = ax^2 + bx + c$.

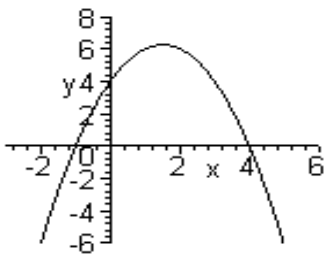
Tập xác định D= R .
Đồ thị là đường parabol , phân biệt hai trường hợp a>0 và a<0 .

a>0 **a<0**

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)



$y = 2x^2 + 3x - 4$



$y = -x^2 + 3x + 4$

Để biết đồ thị hàm bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ cắt trục hoành tại đâu ta giải phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ với công thức nghiệm là

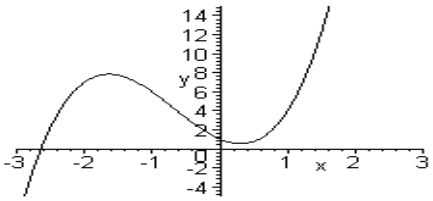
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{và} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**** Hàm bậc ba : $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$***

Tập xác định D= R .

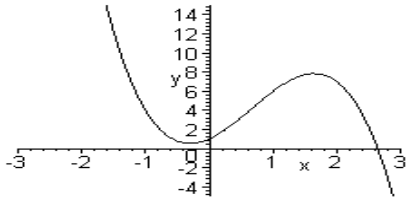
Đồ thị phân biệt hai trường hợp a>0 và a<0 .

a > 0



$y = 2x^3 + 4x^2 - 3x + 1$

a < 0



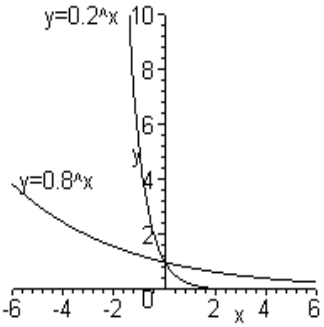
$y = -2x^3 + 4x^2 + 3x + 1$

**** Hàm mũ : $y = a^x$*** (với a>0 , $a \neq 1$).

Tập xác định D= R .

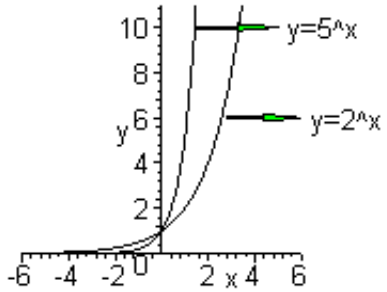
Đồ thị phân biệt hai trường hợp 0<a<1 và a>1 .

0< a<1



$y = 0,8^x$ và $y = 0,2^x$

a>1



$y = 5^x$ và $y = 2^x$

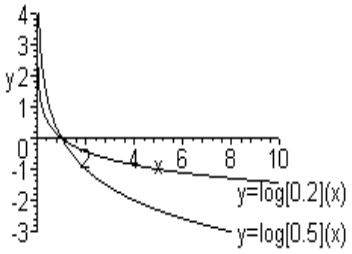
**** Hàm logarit : $y = \log_a x$*** (với a>0 , $a \neq 1$).

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Tập xác định D = $\{x : x > 0\}$.
Đồ thị phân biệt hai trường hợp 0<a<1 và a>1 .

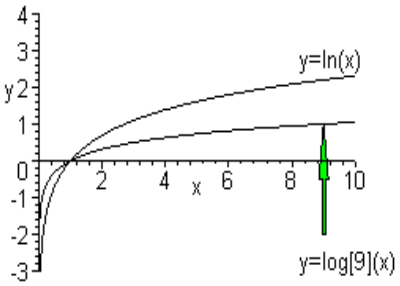
(Nhắc lại định nghĩa logarit $y = \log_a x$ <-> $a^y = x$)

0<a<1



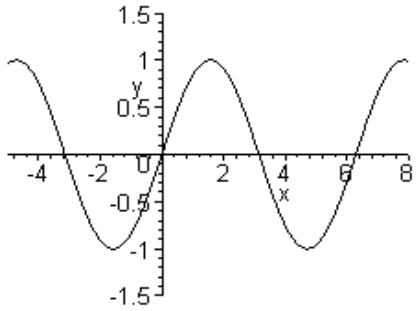
$y = \log_{0,2} x$; $y = \log_{0,5} x$

a>1

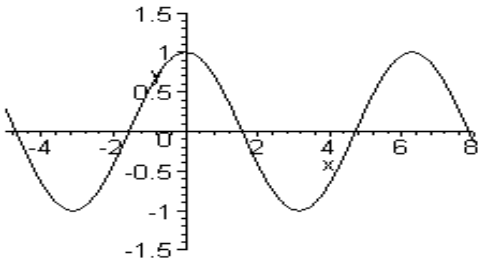


$y = lnx$; $y = \log_9 x$

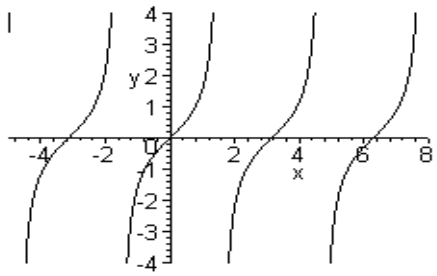
**** Các hàm lượng giác** : **y = sinx , y = cosx , y = tgx , y = cotgx.***



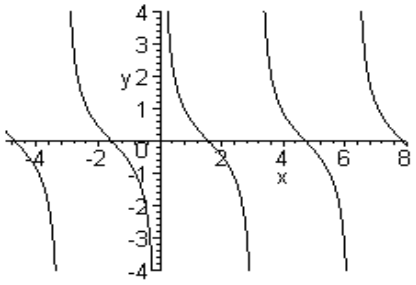
y = sinx



y = cosx



y = tgx



y = cotgx

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Bài tập

1.1 a) Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 3$. Tìm f(-1) , f(0) , f(5) , f(a), f(1+a).

b) Cho hàm số $u = g(x) = x^2 + 2x - 3$. Tìm g(1), g(2) , $g(\frac{1}{a})$, $g(\sqrt{a})$

1.2 Tìm tập xác định của các hàm số :

a) $y = \ln x$, b) $y = \ln(x+5)$, c) $y = \sqrt[4]{x-3}$. , d) $y = \sqrt[3]{x}$, e) $y = \frac{1}{x+2}$

f) $y = \sqrt{(x-1)(x+5)}$, g) $y = e^{x+3}$

1.3 Vẽ đồ thị của các hàm số:

a) $y = -2x + 1$, b) $y = x^2 + 1$, c) $y = x^3$, d) $y = (x - 1)^2$, e) $y = \sqrt{x+3}$

f) $y = -x^2 + 2x + 1$, g) $y = \ln x$, h) $y = 3^x$

1.4 Vẽ đồ thị các hàm số :

a) $y = \sqrt{3-x}$, b) $y = \sqrt{x^2+1}$, c) $y = \ln(x+3)$, d) y = (x-1)(x-2) ,

e) $y = \frac{2}{x-2}$, f) y = 3 , g) x = 2 .

1.5 Công ty Đại bàng sản xuất một loại pin tiểu với chi phí cố định là 38.000$, biến phí là 0.5 $/hộp (hộp 4 viên), giá bán là 0.9$/hộp.

a) Công ty phải sản xuất và tiêu thụ hết bao nhiêu sản phẩm thì bắt đầu có lãi ?

b) Nếu công ty thực hiện chính sách khuyến mãi " mua 1 hộp tặng thêm 1 viên " thì với mức sản lượng nào công ty mới có lãi ?

1.6 Hãy hình dung rằng bạn là một công nhân may đang đứng trước hai lựa chọn : Xin vào làm ở công ty A với mức lương cơ bản 6 $/ngày cộng thêm 0,8 $ cho mỗi sản phẩm. Ở công ty B với mức lương cơ bản 5$/ngày và 0,9$ cho cùng một loại sản phẩm. Bạn sẽ chọn ở đâu ?

1.7 a) Tìm $f_o g(x)$ và $g_o f(x)$ nếu $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^3$

b) Tìm $u_o v(x)$ và $v_o u(x)$ nếu $u(x) = e^x$, $v(x) = \frac{x^2}{2x+1}$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

§2 . GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

1. Giới hạn bên trái:

Ví dụ 1:

Giả sử công ty M có hàm chi phí sản xuất là C(x) = 24 + 3x (định phí : 24 , biến phí : 3). Hàm chi phí sản xuất trung bình là

$$y = \overline{C}(x) = \frac{1}{x}(24 + 3x) = \frac{24}{x} + 3$$

Tính y với một số giá trị của x dần tới 24 nhưng nhỏ hơn 24 ta có

x	20	21	22	23 $\xrightarrow{\text{x tiến tới phía trái}}$ 24
$y = \overline{C}(x)$	4,20	4,14	4,09	4,04 $\quad y \to 4$

Ta thấy x càng gần tới 24 thì y càng gần tới 4. Ta phát biểu là :" $y=\frac{24}{x}+3$ có giới hạn là 4 khi x tiến tới 24 từ bên trái " và viết $\lim\limits_{x\to 24^-}\left(\frac{24}{x}+3\right)=4$ (giới hạn trái) .

2. Giới hạn phải:

Bây giờ ta cho x một số giá trị dần tới 24 nhưng lớn hơn 24

x	24 $\xleftarrow{\text{x tiến tới phía phải}}$ 25	26	27	28
$y = \overline{C}(x)$	4 $\leftarrow$ y 3,96	3,92	3,89	3,86

Ta cũng thấy x càng gần 24 , y càng gần 4. Phát biểu : " y = $\frac{24}{x}+3$ có giới hạn là 4 khi x tiến tới 24 từ bên phải ". Viết là $\lim\limits_{x\to 24^+}\left(\frac{24}{x}+3\right)=4$ (giới hạn phải) .

3. Giới hạn :

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Trong ví dụ trên giới hạn phải và giới han trái bằng nhau (= 4) . Ta nói $y=\frac{24}{x}+3$ có giới hạn là 4 khi *x* tiến tới 24, và viết :

$$\lim_{x\to 24}\left(\frac{24}{x}+3\right)=4 \ .$$

Định nghĩa :

$\lim_{x\to a} f(x)=L$ ***có nghĩa là*** $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$.

Ví dụ 2 : Với cách làm tương tự ta có $\lim_{x\to 4^+}(2x+3) = \lim_{x\to 4^-}(2x+3) = 11$.

Vậy : $\lim_{x\to 4}(2x+3) = 11$.

4. Hàm số dần đến vô cùng

Ví dụ 3 : Xét hàm số : $y=\frac{1}{x-3}$. Ta có bảng :

x	1	2	2,9	2,99	2,999 $\xrightarrow{\quad x \quad}$ 3
y	-0,5	-1	-10	-100	-1000 $y\to -\infty$

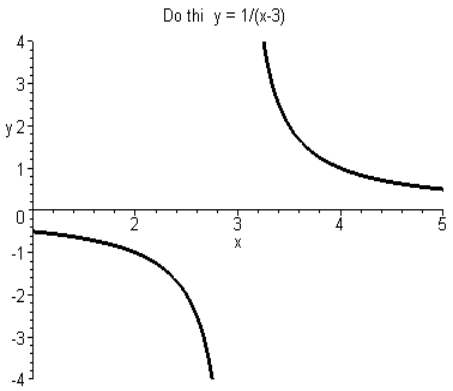
x càng gần 3 thì y là một số âm càng lớn . Ta nói $y=\frac{1}{x-3}$ không có giới hạn trái (hoặc nói hàm số dần tới vô cùng) khi x tiến tới 3 và viết là $\lim_{x\to 3^-}\left(\frac{1}{x-3}\right)=-\infty$.

Xét x tiến tới 3 từ bên phải :

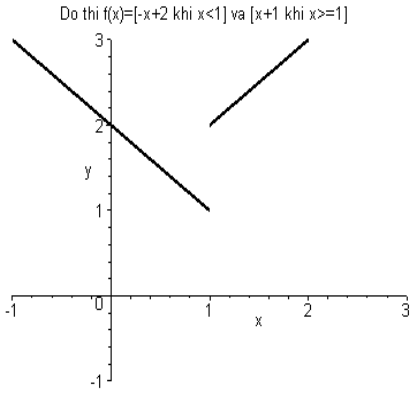
x	3 $\xleftarrow{\quad x \quad}$ 3,001	3,01	3,8	4
y	$+\infty \leftarrow y$ 1000	100	1,25	1

x càng gần 3 thì y là một số dương càng lớn. Vậy $y=\frac{1}{x-3}$ không có giới hạn phải (hàm số dần tới vô cùng). Ta viết $\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{1}{x-3}\right)=+\infty$. (H.1)

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)



H.1 Đồ thị $y=\dfrac{1}{x-3}$



H.2. Đồ thị $y=\begin{cases}-x+2 & khi \quad x<1\\ x+1 & khi \quad x\geq 1\end{cases}$

Ví dụ 4 : Xét hàm số $y=g(x)=\begin{cases}-x+2 & \text{khi } x<1\\ x+1 & \text{khi } x\geq 1\end{cases}$

Có $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=2$ nên $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ không tồn tại .(H.2)

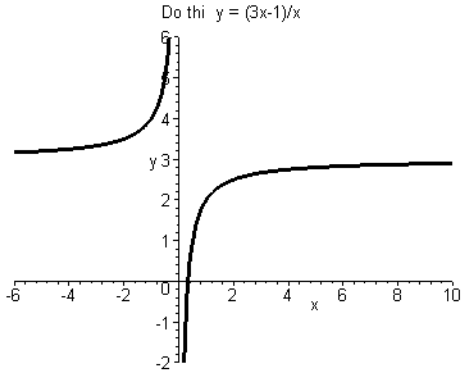
5. Giới hạn tại vô cùng

Ví dụ 5 :

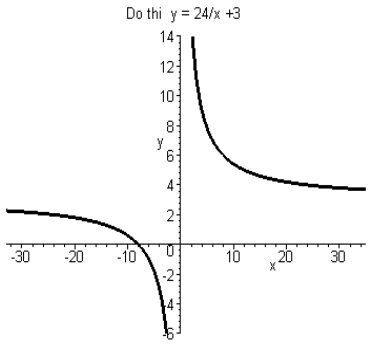
Xét hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x}$ khi $x\to+\infty$ tức là x lấy những giá trị dương lớn dần.

x	1	10	50	100	2000 $\xrightarrow{\quad x \quad}+\infty$
y	2	2,9	2,98	2,99	2,9995 $y\to 3$

Ta viết $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-1}{x}=3.$ (H.3)



H.3 Đồ thị $y=\dfrac{3x-1}{x}$



H.4 Đồ thị $y=\dfrac{24}{x}+3$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Ví dụ 6 : Xem lại hàm chi phí sản xuất của công ty M : y = $\overline{C}(x) = \frac{24}{x} + 3$ .Có bảng sau:

x	24	30	100	200	1000 $\xrightarrow{\quad x \quad} +\infty$
y	4	3,8	3,24	3,12	3,024 $y \to 3$

nghĩa là : " Sản lượng lớn thì chi phí trung bình xấp xỉ biến phí của một đơn vị sản phẩm ". (H.4).

§3. SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa :

Ta nói hàm số f(x) liên tục tại điểm a nếu $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

f(x) liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

Ví dụ1 : $y = \frac{24}{x} + 3$ liên tục tại mọi điểm trừ x = 0.

$y = \frac{1}{x-3}$ liên tục tại mọi điểm trừ x = 3 .

Hàm $y = g(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{khi } x < 1 \\ x+1 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ liên tục tại mọi điểm trừ x = 1. Ta nói hàm g(x) ***gián đoạn tại x = 1.***

Ghi nhớ :

* Hàm f(x) = C (hằng số) luôn liên tục.

* Nếu f(x) liên tục , n là số nguyên thì : $[f(x)]^n$ và $\sqrt[n]{f(x)}$ cũng liên tục .

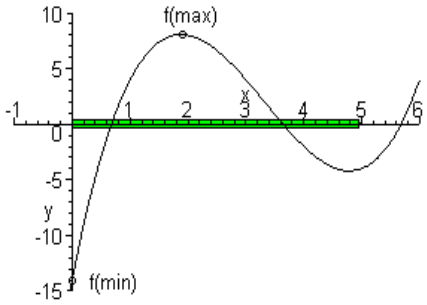
* Nếu f(x) và g(x) liên tục thì : *f(x) + g(x) ; f(x) - g(x) , f(x).g(x)* cũng liên tục.
Với g(x) ≠ 0 *thì* *f(x) : g(x)* cũng liên tục.

2. Hàm liên tục có tính chất gì ?

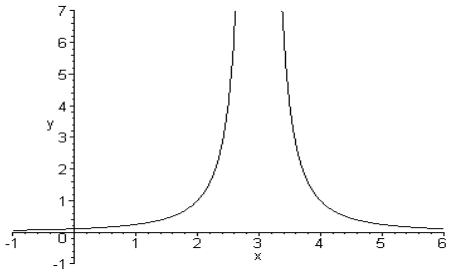
Định lý 1:

Nếu f(x) liên tục trên đoạn [a,b] thì f(x) đạt giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) trên đó.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)



H.5. Đồ thị $y = (x-3)^3-x^2+13$



H.6. $y = \frac{1}{(x-3)^2}$

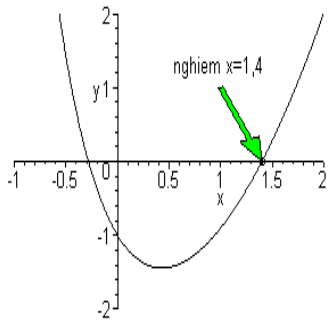
Ví dụ 2 :

Xét hàm $y = (x-3)^3-x^2+13$ (liên tục với mọi x) trên đoạn [0;5] thấy GTNN là y(0) = -14, GTLN là y(1,9) = 8,1 (H.5).

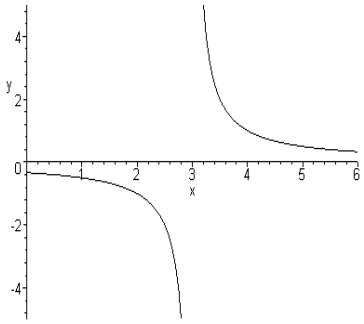
Hàm $y = \frac{1}{(x-3)^2}$ (gián đoạn tại x = 3) , xét trên đoạn [2;4] ,trên đoạn này không có GTLN (H.6).

Định lý 2:

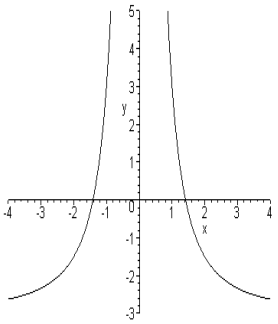
Nếu f(x) liên tục trên đoạn [a,b] và $f(a).f(b) < 0$ (tức là $f(a)$ và $f(b)$ khác dấu) thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong [a,b].



H.7 Đồ thị $y = x^2+0,1^x-2$



H.8 $y = \frac{1}{x-3}$



H.9 $y = \frac{6}{x^2}-3$

Ví dụ 3 :

Cho $f(x) = x^2 + 0,1^x - 2$ (đây là hàm liên tục với mọi x)

f(0) . f(2) = (0+1 -2). (4 + 0,01 -2) < 0 , vậy phương trình $x^2 + 0,1^x - 2 = 0$ có nghiệm x_0 : $0 < x_0 < 2$. $x_0 \approx 1.4$, [0;2] gọi là khoảng chứa nghiệm . (H.7).

Ví dụ về hai hàm gián đoạn có và không có tính chất trên :

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

i) Xét $h(x)=\frac{1}{x-3}$ gián đoạn tại x = 3 (H.8). Ta có *h(2).h(4)*<0; nhưng pt $\frac{1}{x-3}=0$ không có nghiệm trong đoạn [2;4].

ii) Xét $g(x)=\frac{6}{x^2}-3$ gián đoạn tại x = 0 (H.9). Ta có g(-3).g(1) <0 ; Pt $\frac{6}{x^2}-3=0$ có một nghiệm trong [-3;1], $x_0 \approx 1.4$.

3. Dùng máy tính bỏ túi:

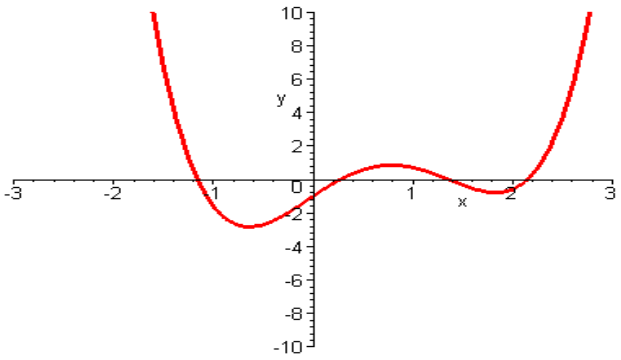
Tìm các khoảng chứa nghiệm của phương trình : $x^4-3x^3-x^2+3x+e^x-2=0$.

Giải :

Lập hàm $f(x)=x^4-3x^3-x^2+3x+e^x-2$ (liên tục với mọi x),dùng máy tính bỏ túi để tính toán ta có bảng sau:

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	28,1	-1,6	-1	0,7	-0,6	18,1

Vậy các khoảng chứa nghiệm là: (-2;-1) (0;1) (1;2 (2,3)



Đồ thị $f(x)=x^4-3x^3-x^2+3x+e^x-2$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

§4. CÁCH TÍNH GIỚI HẠN

1. Định lý :

Nếu $\lim_{x\to a} f(x) = L$ va $\lim_{x\to a} g(x) = M$ thì :

* $\lim_{x\to a} C = C$ (C: hằng số)
* $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n = L^n$, n là nguyên đương .
* $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ (với $L \geq 0$ nếu n chẵn)
* $\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = L+M$.
* $\lim_{x\to a}\left[f(x).g(x)\right] = L.M$
* $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ vôi $M \neq 0$.
* $\lim_{x\to a}\left[C.f(x)\right] = C.L$.

Ví dụ 1 :

a) $f(x) = \dfrac{4}{x^2+1}$ khi $x \to 0$ thì $f(x) \to 4$.

b) g(x)= $x+\frac{1}{2}$ khi $x \to 0$ thì $g(x) \to \dfrac{1}{2}$.

Khi đó ta có : $(f.g)(x) = (\dfrac{4}{x^2+1})(x+\dfrac{1}{2})$ khi $x \to 0$ thì $(f.g)(x) \to 2$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

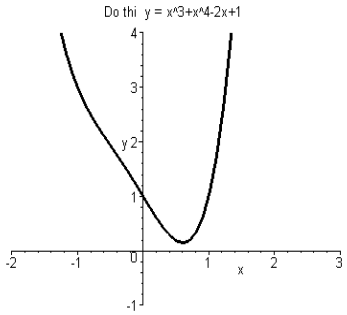
Hình 1

Để tính giới hạn $\lim_{x\to a} f(x)$, nếu biết đây là hàm liên tục thì công việc đơn giản . Tại điểm *a* hàm liên tục thì $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$.

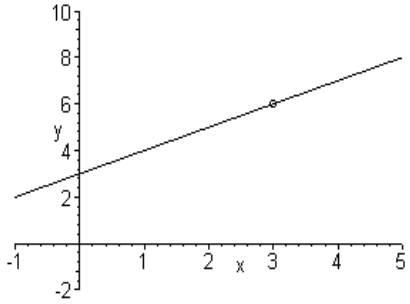
Ví dụ 1:

a) Cho $f(x) = x^4+x^3-2x+1$, vì f(x) liên tục với mọi x nên

$$\lim_{x\to 1}(x^4 + x^3 - 2x + 1) = 1^4 + 1^3 - 2.1 + 1 = 1 \quad \text{(H.2)}$$



H.2 Đồ thị $y = x^4 + x^3 - 2x + 1$



H.3 $y = \dfrac{x^2-9}{x-3}$

b) Cho $h(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$, hàm gián đoạn duy nhất tại x = 3 nên

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 5} \frac{25-9}{5-3} = \frac{16}{2} = 8.$$

Có một lưu ý riêng : hàm h(x) không xác định tại x = 3, nhưng

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6 \text{ (H.2).}$$

2. Các ví dụ khác:

i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2+1}{x} = \dfrac{1}{0} = \infty$

ii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2+x}{x^3} = \dfrac{2}{0} = \infty$

iii) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x-1}{x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\frac{3x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{3-\frac{1}{x}}{1} = 3$ (vì $\dfrac{1}{x} \to 0$, *hay* $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\infty} = 0$)

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

iv) $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+x}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0$$

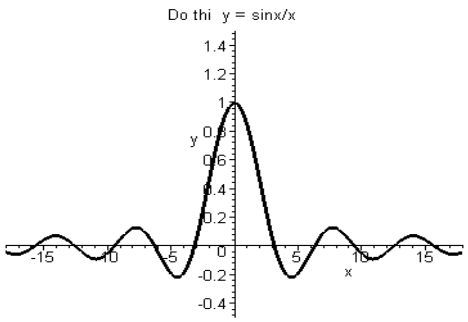
(vì $\frac{5}{x},\frac{1}{x^2},\frac{1}{x^3}\to 0$).

v) $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^3}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x\to\infty}(5x^2+\frac{1}{x}) = \infty$$

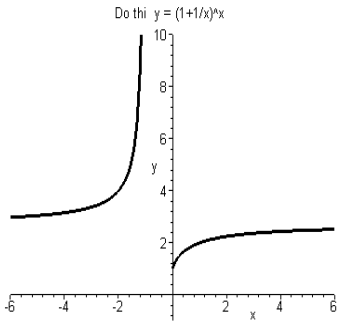
3. Ghi nhớ:

Người ta đã chứng minh được :

1/ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad (H.4) \qquad \text{và} \quad 2/\ \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e \quad (H.5)}$ $(e\approx 2{,}71828...)$.



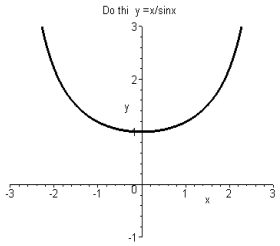
H.4 $y=\frac{\sin x}{x}$



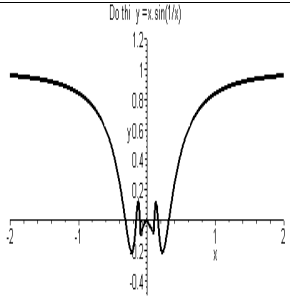
H.5 $y=(1+\frac{1}{x})^x$

Từ 1/ và 2/ dễ dàng thấy được các giới hạn tương tự :

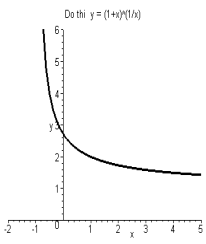
$\boxed{3/\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1\ (H.6) \qquad 4/\ \lim_{x\to\infty} x.\sin(1/x) = 1 (H.7) \qquad 5/\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e \quad (H.8)}$



H.6 $y=\frac{x}{\sin x}$



H.7 $y = x.\sin(1/x)$



H.8 . $y=(1+x)^{1/x}$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

4. Dùng máy tính bỏ túi tính giới hạn:

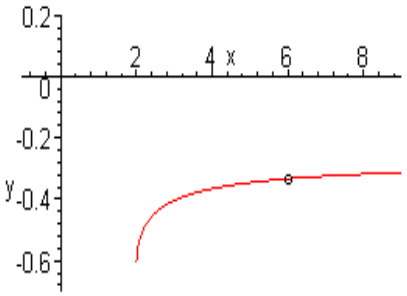
Ví dụ 4:

a/ Giả sử phải tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{6x}-6}$ ta có thể dùng một máy tính loại Casio-fx 570 hoặc tương đương, cho x vài giá trị theo định hướng "x dần tới 6" rồi tính *f(x)* .Xem bảng sau :

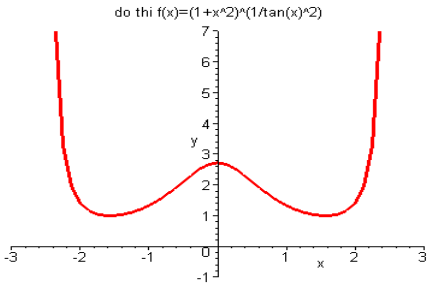
$x \to 6 \leftarrow x$

x	5	5,5	5,95	5,99	6	6,01	6,1	6,5
f(x)	-0,3460	-0,3390	-0,3338	-0,3334		-0,3332	-0,3323	-0,3285

Từ đây ta nói là $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{6x}-6}=-0.3333$ (H.9)



H.9 Đồ thị của $y=\dfrac{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{6x}-6}$



H.10 Đồ thị $y=(1+x^2)^{\cot g^2 x}$

b/ Phải tính $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\cot g^2 x}$, dùng máy tính như ví dụ trên, vì trong máy không có nút "cotg " nên phải đổi thành $f(x)=(1+x^2)^{1/tg^2 x}$ có:

$x \to 0 \leftarrow x$

x	-0,01	-0,009	-0,005	-0,001	0	0,001	0,005	0,009
f(x)	2,6969	2,7180	2,7182	2,7182		2,7182	2,7182	2,7180

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\cot g^2 x}=2.7182...\approx e$ (H.10)

(Cách giải truyền thống của bài toán này là:

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\cot g^2 x}=\lim_{x\to 0}[(1+x^2)^{1/x^2}]^{x^2/tg^2 x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(\frac{x}{tgx})^2} = e^1 = e$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Bài tập

4.1 Cho $y = f(x) = \dfrac{5x^3 + x - 2}{(x-1)(x+2)}$. Tìm các giới hạn :

$a / \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ $b / \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ $c / \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ $d / \lim\limits_{x\to -2} f(x)$ $e / \lim\limits_{x\to \infty} f(x)$

4.2 Cho $y = g(x) = \dfrac{x+1}{(x-1)x}$ Tìm các giới hạn :

$a / \lim\limits_{x\to 5} g(x)$ $b / \lim\limits_{x\to 1} g(x)$ $c / \lim\limits_{x\to 0} g(x)$ $d / \lim\limits_{x\to \infty} g(x)$

4.3 Cho $y = f(x) = \dfrac{7x^2 + 2}{2(x+1)(x+2)}$. Tìm các giới hạn:

$a / \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ $b / \lim\limits_{x\to -2} f(x)$ $c / \lim\limits_{x\to \infty} f(x)$

4.4 Cho $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{vôi } x \le -1 \\ -x-1 & \text{vôi } -1 < x \le 0 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{vôi } x > 0 \end{cases}$; ham nay gian ñoan ô ñau ?

4.5 Cho $y = f(x) = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}$. Tìm các giới hạn :

$a / \lim\limits_{x\to 4} f(x)$ $b / \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ $c / \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ $d / \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

4.6 Tìm các giới hạn sau bằng máy tính bỏ túi :

$a)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2 + \sin^3 x}$ $b) \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x - \sin x}$ $c) \lim\limits_{x\to 2} (x^2 - 4) tg(\dfrac{\pi x}{4})$

4.7 Tìm các khoảng chứa nghiệm của các phương trình bằng máy tính bỏ túi :

a) $x^2 + \ln x - 4 = 0$ b) $x + 5 + 4^x = 0$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

§5. ĐẠO HÀM

1. Số gia :

Cho hàm y = f(x)

Đặt $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ (Δy gọi là số gia hàm số tại x).

Δx gọi là số gia đối số .

Ví dụ :

Cho y = 2x+1 và $\Delta x = 0{,}5$. Tính Δy tại x = 10 .

$\Delta y = 2(x+\Delta x)+1-(2x+1) = 2(10+0{,}5)+1-(2.10+1) = 1$

2. Hàm tăng , giảm : (Trong phần này nói hàm số ta hiểu là hàm số liên tục).

Định nghĩa:

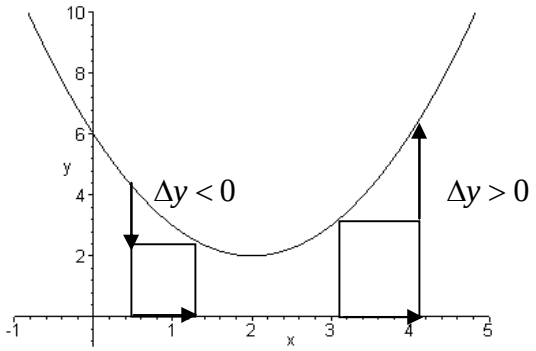
Hàm y = f(x) gọi là *hàm tăng* trên khoảng (a;b) nếu với mọi x_1, x_2 thuộc (a;b). Nếu $x_1 < x_2$ ta có $f(x_1) < f(x_2)$ thì ta gọi (a;b) là khoảng tăng .

Ta nói tại x_0 hàm số tăng nếu x_0 thuộc một khoảng tăng nào đó .

Hàm y = f(x) gọi là *giảm* trên khoảng (a;b) nếu với mọi x_1, x_2 thuộc (a;b) $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.

Từ định nghĩa ta thấy tại một điểm x_0 với $\Delta x \approx 0$ nếu $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ (Δx và Δy cùng dấu) thì tại đây hàm tăng, nếu $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ thì hàm giảm.

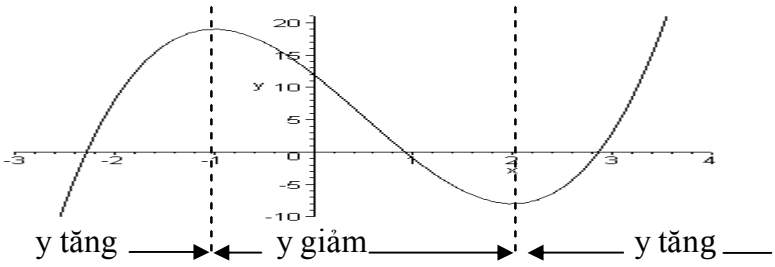
Ví dụ 1: Đồ thị $y = x^2 - 4x + 6$



(H.1)

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Ví dụ 2 : Sự tăng giảm của hàm số thể hiện qua đồ thị :



(H.2)

3. Đạo hàm của hàm số

Đạo hàm là một công cụ để xét sự tăng giảm của hàm số , kí hiệu là y' hoặc f'(x), $\frac{dy}{dx}$.

Định nghĩa:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(Nếu tại điểm x nào đó lim này không tồn tại, ta nói f(x) không có đạo hàm tại đó).
Rõ ràng là nếu $y'(x_0) > 0$ thì hàm số tăng tại x_0; $y'(x_0) < 0$ thì hàm số giảm tại x_0.

Ví dụ 3:

Xét sự tăng giảm của $y = f(x) = x^2 - 4x + 6$ tại các điểm x = 1 ; x = 3 ; x = 5.

Giải :

a) Tìm đạo hàm y' , để cho dễ nhìn ta đặt $\Delta x = h$:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - 4(x+h) + 6 - (x^2 - 4x + 6)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 4x - 4h + 6 - x^2 + 4x - 6}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 - 4h}{h}$$

$= \lim_{h \to 0}(2x + h - 4) = 2x - 4$. Vậy y' = 2x - 4 .

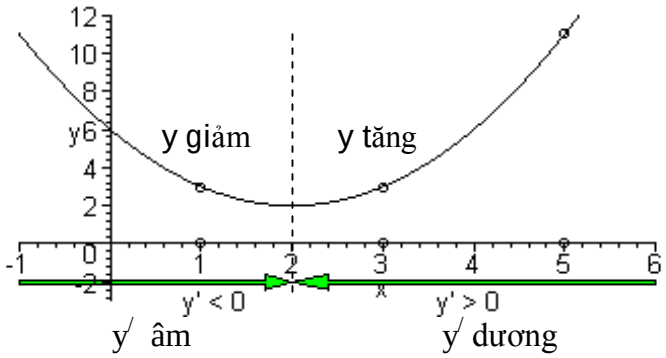
Ta có thể viết $(x^2 - 4x + 6)' = 2x - 4$.

a) Tại x = 1 : y'(1)= 2.1 – 4 = -2 < 0 : hàm giảm.

b) Tại x = 3 : y'(3) = 2.3 – 4 = 2 > 0 : hàm tăng

c) Tại x = 5 : y'(5) = 2.5 – 4 = 6 > 0 : hàm tăng mạnh.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

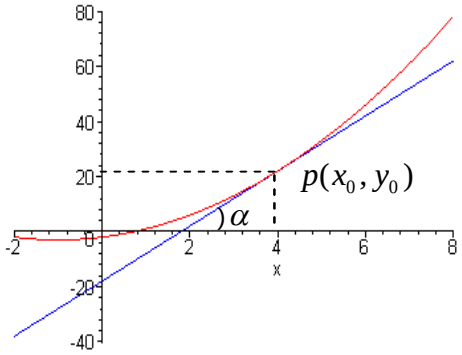


(H.3)

4. Ghi nhớ:

* Nếu tại x_0 và $y'(x_0)$ không tồn tại , ta nói hàm ***không khả vi*** tại x_0 .
*Nếu hàm gián đoạn tại x_0 thì không khả vi tại đó.
* $y'(x_0) = tg\alpha$; α là góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $(x_0; y_0)$.
Do đó ta có phương trình tiếp tuyến tại điểm $(x_0;y_0)$ là

$$y-y_0 = y'(x_0).(x-x_0). \quad (*)$$



(H.4)

Ví dụ : Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị của $y = x^2 + 2x - 2$ tại x = 4 .

$y' = 2x + 2$ $y'(4) = 10$ $y(4) = 22$ theo công thức (*) ta có $y - 22 = 10(x - 4)$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là $y = 10x - 18$ (H.4)

5. Một số công thức

Bằng định nghĩa của đạo hàm, làm như ở ví dụ 2 ở trên ta có được các công thức sau :

1) $(C)' = 0$ *2)* $(x^m)' = mx^{m-1}$ *3)* $(a^x)' = a^x.\ln a$

4) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ *5)* $(\sin x)' = \cos x$ *6)* $(\cos x)' = -\sin x$

7) $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ *8)* $(\cot gx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Từ công thức 2) *ta có* $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Từ công thức 3) *ta có* $(e^x)' = e^x$.

Từ công thức 4) *ta có* $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Ví dụ 4:

$(-6)' = 0$; $(x^7)' = 7x^6$; $(x^{-5})' = -5x^{-6}$;

$\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$; $(2^x)' = 2^x.\ln 2$; $(\log_4 x)' = \frac{1}{x\ln 4}$

u = *f(t)* = t^5 thì $u' = 5t^4$.

Ví dụ 5:

*H*àm số y cho bởi $y = 2xt + t^2 + x$.

Nếu x là biến số , t là hằng số thì $y' = 2t + 1$; để rõ hơn ta viết :

$$y'_x = 2t + 1 \text{ hoặc } \frac{dy}{dx} = 2t + 1.$$

Nếu t là biến số , x là hằng số thì $y'_t = 2x + 2t$ hoặc $\frac{dy}{dt} = 2x + 2t$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Bài tập

5.1 Bằng định nghĩa tính đạo hàm của các hàm số sau :

a) $f(x) = \frac{1}{2}x$ b) $f(x) = (x+3)^2$ c) $f(t) = 4t$ d) $f(x) = x^2 + 3x + 6$

e) $f(x) = 3x + 5$ f) $f(x) = (2x+1)^2$

5.2 Dựa vào các công thức để tìm các đạo hàm:

a) $y = x^6$ b) $y = 4$ c) $y = 0$

e) $y = \sqrt[4]{x^3}$ f) $f(t) = 5^t$ g) $y = \log_4 x$ h) $f(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$

5.3 Cho hàm số $y = f(x) = x^2 + 3x + 6$, cho $\Delta x = h = 1$.

Tìm số gia hàm số Δy tại $x = -5$; $x = 1$; $x = 8$. So sánh với $f'(-5)$, $f'(1)$, $f'(8)$.

5.4 Cho hàm số $y = f(x) = x^2 + 3x + 6$, cho $\Delta x = h = -1$.

Tìm số gia hàm số Δy tại $x = -4$; $x = 0$; $x = 7$. So sánh với $f'(-4)$, $f'(0)$, $f'(7)$.

5.5 Cho : a) $y = x^3 + 3xt^2 - 5$ Tìm $\frac{dy}{dx}; \frac{dy}{dt}$ b) $u = s^3 + 3st + 7$. Tìm $\frac{du}{ds}; \frac{du}{dt}$.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

§6. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

1 . Đạo hàm của tổng 2 hàm số :

$$\boxed{\left[f(x)+g(x)\right]' = f'(x)+g'(x)}$$

Ví dụ1:

$f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$; $g(x) = 4^x$, $g'(x) = 4^x \ln 4$.

Ta có : $(x^2 + 4^x)' = 2x + 4^x \ln x$. Tương tự với hiệu 2 hàm số .

2. Đạo hàm của tích 2 hàm số :

$$\boxed{\left[f(x).g(x)\right]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)}.$$

Ví dụ 2:

$f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$; $g(x) = \sin x$, $g'(x) = \cos x$,

$(x^3 \sin x)' = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$.

3. Đạo hàm của thương hai hàm số:

$$\boxed{\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{1}{g^2(x)}\left[f'(x)g(x) - f(x)g'(x)\right]}$$

Ví dụ 3:

$f(x) = x^4$, $f'(x) = 4x^3$; $g(x) = \cos x$, $g'(x) = -\sin x$.

$$\left[\frac{x^4}{\cos x}\right]' = \frac{1}{\cos^2 x}\left(4x^3\cos x - x^4(-\sin x)\right) = \frac{1}{\cos^2 x}\left(4x^3\cos x + x^4\sin x\right)$$

Từ các quy tắc trên ta tính được :

$$\boxed{\left[c.f(x)\right]' = cf'(x)} \quad , \quad \boxed{\left[\frac{c}{f(x)}\right]' = -\frac{c.f'(x)}{f^2(x)} \quad , \quad c : \text{hang so}}.$$

4. Quy tắc lấy đạo hàm của hàm hợp :

Nếu y là hàm của biến u và u là hàm của biến x thì y cũng là hàm (hàm hợp) của biến x và $\boxed{y'_x = y'_u.u'_x}$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Ví dụ 4: Tính $\frac{dy}{du}, \frac{du}{dx}$ và $\frac{dy}{dx}$. Biết :

a/ $y = 2 + (x^2 - 4)^3$

Giải :

Coi $y = 2 + u^3$ với $u = x^2 - 4$. $\frac{dy}{du} = 3u^2$; $\frac{du}{dx} = 2x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = 3u^2.2x = 3(x^2-4)^2.2x = 6x(x^2-4)^2 .$$

b/ Cho $y = \frac{5}{x^3 - 7} + 2$.

Giải:

Đặt $u = x^3 - 7$ ta có $y = \frac{1}{u} + 2$ và $\frac{dy}{du} = -\frac{5}{u^2}$; $\frac{du}{dx} = 3x^2$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{5}{u^2}.3x^2 = \frac{-15x^2}{(x^3-7)^2}$

.

c/ $y = \sqrt{x^3 + \sin x}$

Giải:

Đặt $u = x^3 + sinx$, $y = \sqrt{u}$. Ta có :

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}; \quad \frac{du}{dx} = 3x^2 + \cos x , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + \sin x}}(3x^2 + \cos x) .$$

d/ $y = 3^{x^5+2x+1}$

Giải:

Đặt $u = x^5 + 2x + 1$; $y = 3^u$. Ta có $\frac{dy}{du} = 3^u \ln 3$; $\frac{du}{dx} = 5x^4 + 2$, $\frac{dy}{dx} = \left(3^u.\ln 3\right).\left(5x^4 + 2\right) = 3^{x^5+2x+1}\left(5x^4 + 2\right).\ln 3$.

e/ $v = sin(t^3 - 2t + 1)$

Giải:

Đặt $u = t^3 - 2t + 1$; $v = sinu$. Ta có $\frac{dv}{du} = \cos u$, $\frac{du}{dt} = 3t^2 - 2$.

Nên $\frac{dv}{dt} = \cos u.(3t^2 - 2) = \left(3t^2 - 2\right)\cos(t^3 - 2t + 1)$.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Bài tập

6.1 Tìm đạo hàm các hàm số :

a) f(x) = (x^5 +1)(x^2 -2x + 1)

b) f(x) = $(x^3 - 2)(1-\sqrt{x})$

c) f(x) = (x^5 + a)(x - 1)^2

d) $f(x) = (4\sqrt{x} - 1)(x^3 - 4x)$

e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{1 - 4x^4}$

f) f(x) = $\dfrac{1}{(x-1)^3}$

g) $f(x) = \dfrac{2^x}{1-x}$.

6.2 Tìm đạo hàm :

a) $f(t) = \dfrac{t^3}{\sqrt{t} - 5}$

b) $f(v) = \dfrac{\sin v}{v^2 - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{2t}{x+1} + x^7$

d) f(x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$

e) $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$.

6.3 Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = \sqrt[3]{x^2 + \sin x}$

b) $y = \left(x^2 + 2x + 1\right)^{10}$

c) $y = \left(\dfrac{1}{x^2 + 1}\right)^5$

d) y = -5x(3x + 5)^6

e) y = (1+ x^3)^5 - (1 + x^3)^7

f) y = (x -4)^8.(x+ 3)^9

g) $= \dfrac{15}{(2x+1)^3}$

h) $y = \ln\left(x^3 + 3x + 3\right)$

i) y = (ax + b)^7 .

j) $y = e^{3x+5}$

k) $y = xe^{x^3+4}$

l) $y = \dfrac{1}{\ln(x^2 + 4)}$

m) $y = \sin(3x^4 - x)$.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

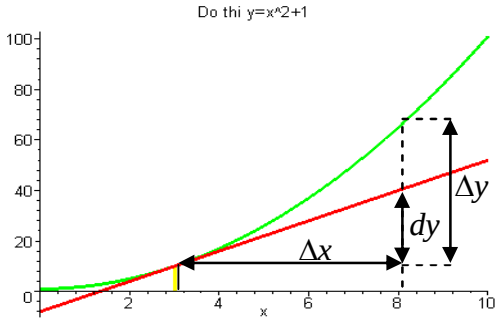
§7. ĐẠO HÀM CẤP CAO- VI PHÂN ĐỊNH LÝ L'HOSPITAL

1. Vi phân của hàm số

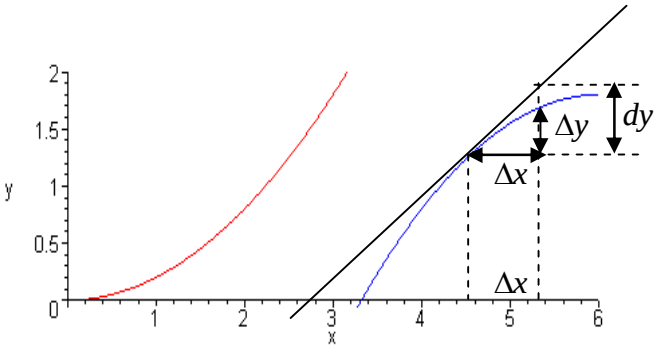
Định nghĩa:

Cho hàm y = f(x) , vi phân của x là dx = Δx (hằng số) và vi phân của y là dy = y′ dx.

Ví dụ : y = $3x^2$+x thì dy = (6x+1) dx



H.1 x $x+\Delta x$



H.2 x $x+\Delta x$

Ta đã biết $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ nghĩa là $y' = f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$ khi $\Delta x \approx 0$. Nhân 2 vế với Δx ñöôc $f'(x).\Delta x \approx \Delta y$ hoaëc $f'(x).\Delta x \approx f(x+\Delta x) - f(x) \Rightarrow$.

$$f(x+\Delta x) \approx f'(x).\Delta x + f(x)$$

Đây là một công thức tính gần đúng.

Ví dụ1 : Tính $(3,01)^5$.

Giải:

Đặt f(x) = x^5 và Δx = 0,01 , x = 3 , f'(x) = $5x^4$. Ta có :

$(3,01)^5$ = f(3+ 0,01) = f(x + Δx) ≈ f'(3).0,01 + f(3)

= 5.3^4.0,01 + 3^5 = 4,05 + 243 = 247,05.

Ví dụ 2: Để tính $\sqrt{35}$.

Ta xét f(x) = $\sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Lấy x = 36 ; Δx = -1, rồi tính:

$\sqrt{35}$ = f(x +Δx) ≈ .....

Từ công thức gần đúng ở trên ta có : dy ≈Δy khi Δx ≈ 0.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

2. Đạo hàm cấp cao :

Xét hàm số $y = f(x) = x^6 - 3x^2 + x.$

$y' = 6x^5 - 6x + 1,$

lấy đạo hàm lần nữa có: $y'' = (6x^5 - 6x + 1)' = 30x^4 - 6$, ta gọi đây là đạo hàm cấp 2.

Đạo hàm cấp 3 là $y''' = 120x^3$, đạo hàm cấp 4 là $y^{(4)} = 360x^2$, ...

Ta có thể viết (khi x là biến độc lập):

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} \; ; \; ..... \; y^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4} \; , ...$$

3. Định lý L'Hospital:

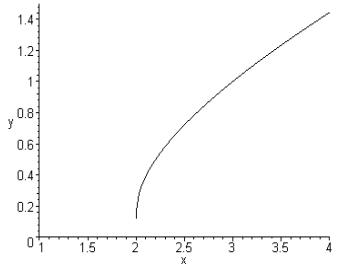
Nếu f(x) và g(x) liên tục trên [a;b] và khả vi trong đó, đồng thời , f(c)=g(c)=0, $g'(x) \neq 0$ *và* $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ *thì* $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Ví dụ 1: Tìm $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\ln(x-2)}$

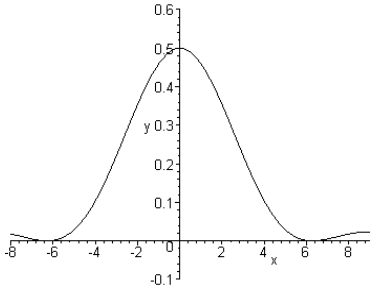
Giải :

Giới hạn này có dạng $\frac{0}{0}$.

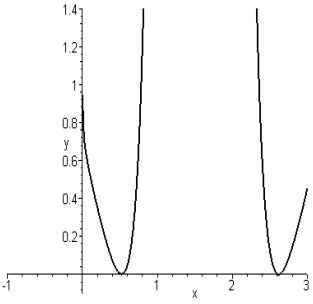
Áp dụng định lý $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\ln(x-2)} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)'}{[\ln(x-2)]'} = \lim_{x\to 3}\frac{1}{(\frac{1}{x-2})} = 1$



H.2 $y = \frac{x-3}{\ln(x-2)}$



H.3 $y = \frac{x^2}{1-\cos x}$



H.4 $y = \frac{\ln(\sin 3x)}{\ln(\sin x)}$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Ví dụ 2: Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$

Giải :

Giới hạn có dạng $\dfrac{0}{0}$. Áp dụng định lý :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

ở đây đã sử dụng định lý 2 lần. (H.3)

* *Chú ý:* Định lý L'Hospital cũng sử dụng được khi lim có dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$, tức là khi $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$ và $\lim\limits_{x\to c} g(x)=\infty$.

Ví dụ 3: Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin 3x)}{\ln(\sin x)}$.

Giải:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin 3x)}{\ln(\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{[\ln(\sin 3x)]'}{[\ln(\sin x)]'}=\lim_{x\to 0}\frac{3.\dfrac{\cos 3x}{\sin 3x}}{\dfrac{\cos x}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x.\sin x}{\sin 3x.\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{[3\cos 3x.\sin x]'}{[\sin 3x.\cos x]'}.$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3.(-3\sin 3x\sin x+\cos 3x\cos x)}{-\sin 3x\sin x+3\cos 3x\cos x}=\frac{3}{3}=1 \quad \text{(H.4)}$$

Bài tập

7.1 Ước lượng các giá trị sau : a) $(4{,}9)^5$, b) $\sqrt{82}$, c) $\sqrt[3]{28}$.

7.2 Cho a) $y = x^5 + 4x^2 + 7$ b) $y = (7 - x)^8$. Tìm dy tại x = 2 cho $\Delta x = 0{,}1$.

7.3 Dùng định lý L'Hospital tìm giới hạn :

a/ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$ b/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\sin x-x}$ c/ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}$

d/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\cos x-1}$ e/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\cos x-x}$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

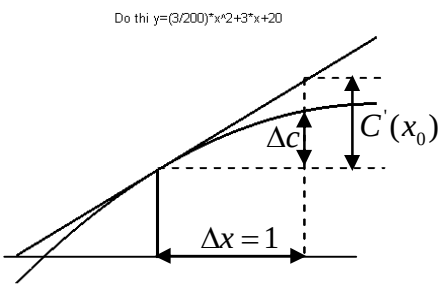
§8. CÁC HÀM BIÊN TẾ - ĐỘ CO GIÃN CỦA HÀM CẦU

1. Chi phí biên tế

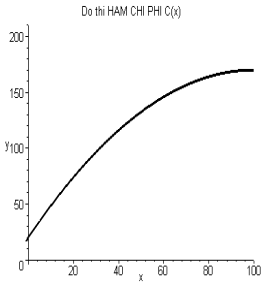
Ví dụ 1: Giả sử một công ty có hàm tổng chi phí là $C(x)=-\frac{3}{200}x^2+3x+20$ (x là sản lượng và $0 \le x \le 100$).

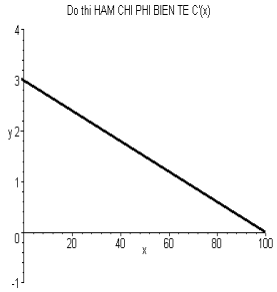
Khi đó hàm $C'(x)=-\frac{3x}{100}+3$ được gọi là hàm chi phí biên tế (marginal cost function). Ta có ; C'(10) = 2,7 ; C'(20) = 2,4. Ta hiểu là tại mức sản lượng $x_0 = 10$ nếu tăng 1 đơn vị sản phẩm thì chi phí tăng khoảng 2,7 (đơn vị tiền tệ) .

$$C'(x_0) \approx C(x_0+1)-C(x_0) = \Delta C \quad \text{cho} \quad \Delta x = 1$$



H.1 x_0 x_0+1





H.2

Tương tự hàm doanh thu biên tế là R'(x) , hàm lợi nhuận biên tế là P'(x).

2. Hệ số co giãn của hàm cầu

Hàm cầu thể hiện tương quan giữa giá bán và lượng cầu, hàm cầu : x = f(p) (x là số lượng, p là đơn giá) với đặc tính p tăng thì x giảm.

Hệ số co giãn của x đối với p

E=(thay đổi tương đối của x): (thay đổi tương đối của p) = $\dfrac{\Delta x / x}{\Delta p / p}$

Ví dụ 2:

Một tiệm giặt ủi thấy rằng hàm cầu của mình là x = f(p) = 120 - 20p (x: kg quần áo, p là đơn giá $/kg).

Ta sẽ nghiên cứu $\frac{\Delta x}{x}; \frac{\Delta p}{p}$ tại 2 điểm p = 1$ và p = 3 $ với Δp=0,5$.

* Tại p = 1 $: f(1) = 120 - 20 = 100; f(1,5) = 120 - 30 = 90.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{0,5}{1} = 0,5; \qquad \frac{\Delta x}{x} = \frac{90-100}{100} = -\frac{10}{100} = -0,1$$

$\frac{\Delta x / x}{\Delta p / p} = \frac{-0,1}{0,5} = -0,2$. Số này cho ta thấy giá tăng 1 % thì nhu cầu giảm 0,2 %.

* Tại p = 3$: f(3) = 120 - 60 = 60 ; f(3,5) = 120 - 70 = 50.

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{0,5}{3}; \qquad \frac{\Delta x}{x} = \frac{50-60}{60} = -\frac{10}{60}.$$

$\frac{\Delta x / x}{\Delta p / p} = \frac{0,5}{3} : \frac{-10}{60} = -1$

(giá tăng 1 % thì nhu cầu giảm 1 %). Hệ số co giãn $E = \dfrac{\Delta x / x}{\Delta p / p}$

So sánh tại 2 điểm ta thấy tại p = 3$ việc tăng giá sẽ ảnh hưởng mạnh hơn tới nhu cầu so với việc tăng giá tại mức giá p = 1 $.

Hàm co giãn của cầu:

Ta biến đổi $\frac{\Delta x / x}{\Delta p / p} = \frac{p}{x}\left(\frac{\Delta x}{\Delta p}\right)$, mà $\lim\limits_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta p} = f'(p)$.

Từ đó : $\frac{\Delta x / x}{\Delta p / p} = f'(p).\frac{p}{x}$ ta gọi đây là hàm co giãn của cầu và ký hiệu là E(p).

$$\boxed{E(p) = f'(p).\frac{p}{f(p)}}$$

Lấy lại ví dụ trên x = f(p) = 120 - 20p thì $f'(p) = -20$ từ đó

E(p) = $-20.\frac{p}{120-20p} = -\frac{p}{6-p}$

Tính được $E(1) = -\frac{1}{6-1} =$ - 0,20 (hiểu là tại mức giá p=1 ***hệ số co giãn*** là - 0,20)

E(3) = -1; E(4) = - 2) .

Ví dụ 3:

Hệ số co giãn của một số mặt hàng tại Mỹ (2002):

- Co giãn mạnh : Đồ gỗ : - 1,26 ; Xe hơi : - 1,14 ; ....
- Không co giãn : Thực phẩm : - 0,58 ; Quần áo : - 0,49 ; Sách báo : -0,34 ; ...

(Nếu $|E(p)| < 1$, ta nói " cầu không co giãn ").

Hệ số co giãn biểu thị phản ứng của người mua đối với việc tăng giá .

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Bài tập

8.1 Giả sử dầu thô trên thế giới có hàm cầu là : $x = 63.000 + 50p - 25p^2$,($0 \le p \le 50$).
(x : triệu barrel/ ngày . p: $/ barrel).
a) Tìm hàm co giãn.
b) Tìm hệ số co giãn tại mức giá p = 30$; p = 40$.

8.2 Hàm cầu của một loại hàng là $x = \frac{600}{(p+4)^2}$, tìm hàm co giãn E(p) . Tìm E(6) , E(12) ; nêu ý nghĩa của sự khác biệt.

8.3 Tháng 12-2005 giá vàng SJC tại thành phố K. tăng từ 950.000 đ/chỉ lên 1.080.000 đ/chỉ , lượng tiêu thụ giảm 30%, trong khi đó giá xăng từ 10.000 đ/lít tăng thêm 500 đ/lít , lượng tiêu thụ giảm từ 1.250.000 lít/ngày xuống còn 1.150.000 lít /ngày. Tìm hệ số co giãn của 2 mặt hàng này ?

8.4 a) Tìm hàm chi phí biên tế C'(x) nếu $C(x) = 1000\sqrt{x^3+2}$
b) Tìm hàm doanh thu biên tế R'(x) nếu $R(x) = 2000\sqrt{x^2+3}$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

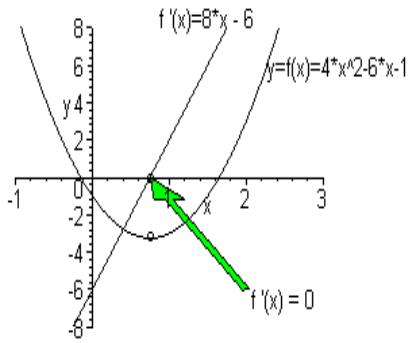
§9. CỰC ĐẠI VÀ CỰC TIỂU CỦA HÀM SỐ

1. Định lý về sự tăng ,giảm :

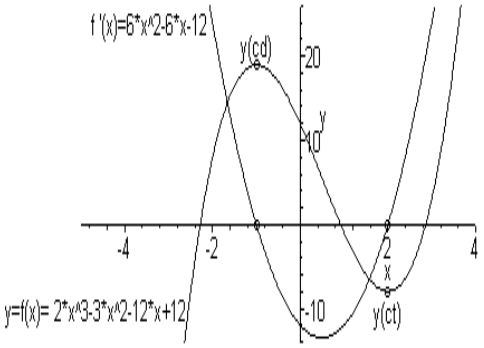
Nếu $f'(x_0) > 0$ *thì tại* x_0 *hàm* $f(x)$ *tăng. Nếu* $f'(x_0) < 0$ *thì tại* x_0 *hàm* $f(x)$ *giảm.*
Xét tại điểm x_1 với $\Delta x = x_2 - x_1$ và $\Delta x \approx 0$.

Nếu $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \quad \Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, vậy hàm tăng.

Ví dụ 1 :



H.1 $y = 4x^2-6x-1$ và $y' = 8x-6$



H.2 $y = \dfrac{4}{3}x^3 - 3x^2 - x + 2$ và $y' = 4x^2-6x-1$

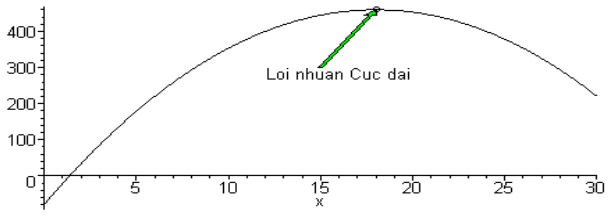
2. Ví dụ về cực đại:

Công ty M bán hàng theo phương thức giao hàng tại nhà, có hàm lợi nhuận là $P(x) = -\dfrac{5}{3}x^2 + 60x - 80$ (x là số nhân viên giao hàng). Sau tám tháng hoạt động, số liệu về lợi nhuận từng tháng được biết là :

Tháng thứ	1	2	3	4	5	6	7	8
x(người)	4	8	10	16	***18***	21	24	16
P(lợi nhuận)	133	293	353	453	***460***	445	400	353

Giám đốc công ty nhận ra rằng : Lúc đầu khi tăng số nhân viên thì doanh số tăng dẫn đến lợi nhuận tăng theo. Tuy nhiên, khi số nhân viên lên đến 18 người thì mức tiêu thụ ở địa bàn đã bão hoà, việc tăng thêm nhân viên chỉ làm cho chi phí tăng ,như vậy lợi nhuận giảm. Tóm lại lợi nhuận đạt cực đại khi số nhân viên là 18. (H.3)

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

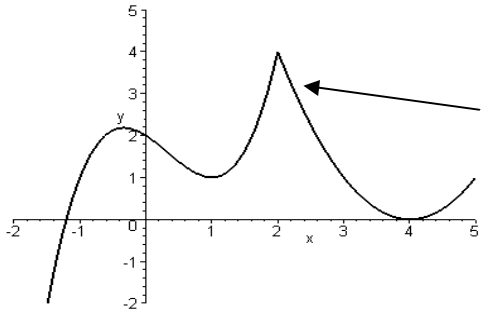


Lợi nhuận cực đại

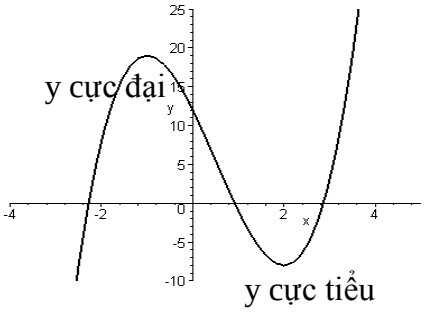
H.3

3. Cực trị và điểm dừng:

Ta nói hàm y= f (x) đạt cực đại tại x= c nếu tại đây hàm số chuyển từ tăng sang giảm (tương tự: Hàm số đạt cực tiểu nếu tại x = c hàm số chuyển từ giảm sang tăng). Ta thường nói đây là cực trị địa phương .



H.4 y cực trị



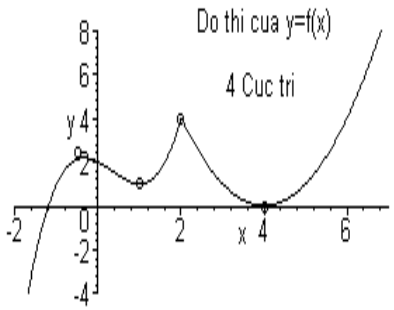
H.5

Cực trị: Cực đại và cực tiểu có tên chung là cực trị .

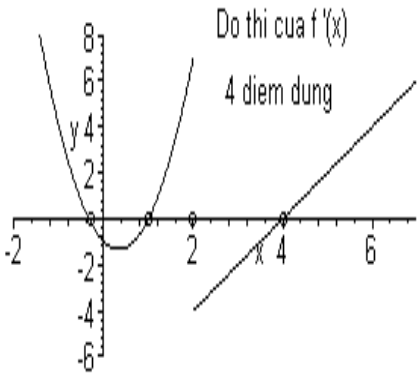
Điểm dừng : Ta nói c là điểm dừng nếu $f'(x)\big|_{x=c} = 0$ hoặc $f'(x)\big|_{x=c}$ không tồn tại**.**

Ví dụ 2: Về một hàm số có 4 điểm dừng :

Đồ thị của f(x) và $f'(x)$



H.6 Đồ thị f(x), 4 điểm dừng.



H.7 Đồ thị $f'(x)$

Để tìm cực trị (cực đại và cực tiểu) của hàm số chúng ta có một công cụ hữu hiệu là đạo hàm.

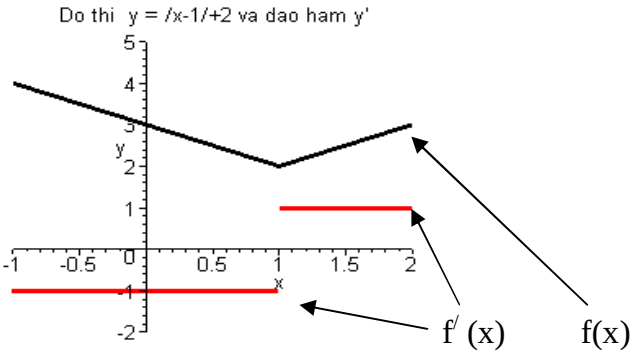
Định lý :

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Nếu f(c) là cực trị thì x = c là điểm dừng, tức là f'(c) = 0 hoặc không tồn tại.

Ví dụ 3:

Hàm y = /x-1/+2 có cực tiểu tại x = 1, tại đây y/ không tồn tại (H.8).



H.8

Từ hai định lý trên ta xây dựng được quy tắc để tìm cực trị của hàm số:

4. Quy tắc tìm cực trị :

a- Tìm điểm dừng : giả sử x = c là điểm dừng.

b- Xét sự đổi dấu của y' tại c . Nếu y' đổi dấu từ + sang - thì f(c) là cực đại; nếu y' đổi dấu từ - sang + thì f(c) là cực tiểu.

Ví dụ 4: Tìm cực trị của $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 12$.

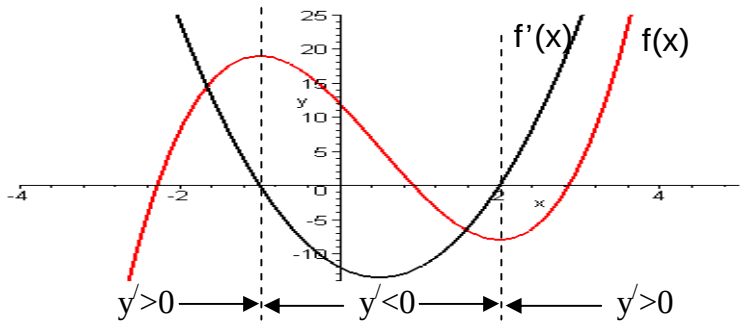
Giải :

$y' = 6x^2 - 6x - 12$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoac $x = 2$.

Hàm có 2 điểm dừng: x = -1 và x = 2.

Lập được bảng biến thiên:

x	-∞		-1		2		+∞
y'		+	0	-	0	+	
y	-∞	↗	19	↘	-8	↗	+∞



H.9 $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 12$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Ví dụ 6:

Tìm cực trị của hàm số $y = (x -2)^{2/3} + 1$.

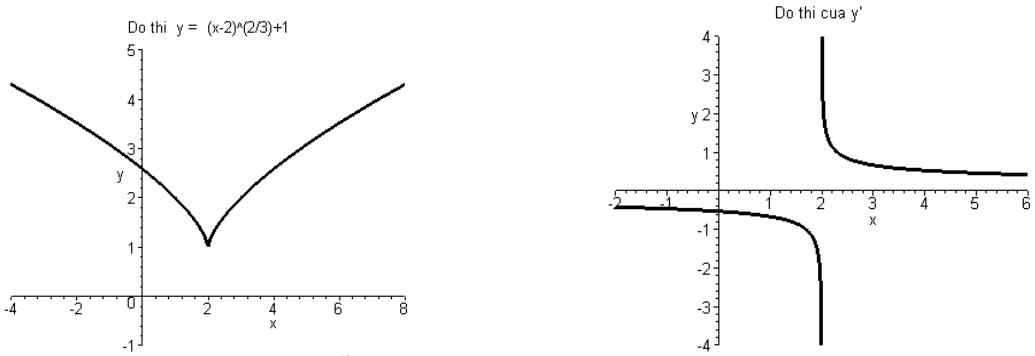
***Giải*:** Tìm điểm dừng : $y' = \frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$.

Điểm dừng duy nhất là : x = 2, tại đây y' không tồn tại.

Xét dấu của y' : $y'(1) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{-1}} < 0$; $y'(3) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1}} > 0$, y' đổi dấu.

Vậy y(2) = 1 là cực tiểu. (H.10)

Đồ thị của f(x) đồ thị của f'(x)



H.10 $y = (x -2)^{2/3} + 1$.

5. *Dùng y'' như thế nào ?*

Ta thấy nếu tại x = c, y'chuyển từ âm sang dương, nghĩa là y' tăng; y' tăng nghĩa là đạo hàm của nó (y'') dương.

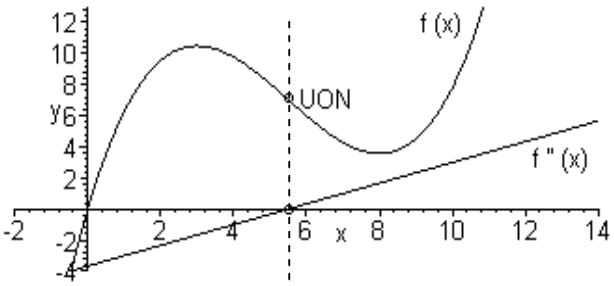
Vậy : Nếu y'(c) =0 và y''(c) > 0 ⇒ f(c) là cực tiểu.

[y''(c) < 0 ⇒ f (c) là cực đại.]

Ví dụ 7: Xét $y = \frac{x^3}{9} - \frac{11x^2}{6} + 8x$, $y' = \frac{x^2}{3} - \frac{11x}{3} + 8$, $y'' = \frac{2x}{3} - \frac{11}{3}$

y' = 0 khi x = 3 và x= 8.

y''(3) = 2 - $\frac{11}{3}$ < 0 ⇒ có cực đại, y''(8) = $\frac{5}{3}$ > 0 ⇒có cực tiểu. (H.11)



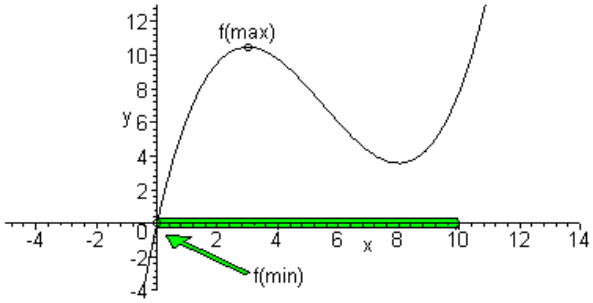
H.11 —— y''<0 ⟶ ⟵ —— y''>0 ——

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

6. Điểm uốn

Trên đồ thị ta (H.11) để ý điểm x = 5,5. Tại đây y'' chuyển từ âm sang dương. y' từ giảm chuyển sang tăng. Điểm U [5,5 ; f(5,5)] gọi là điểm uốn của đồ thị của hàm y = f(x).

7. Max và min (Cực trị tuyệt đối)



H.12. $y = \frac{x^3}{9} - \frac{11x^2}{6} + 8x$

Ví dụ 8 : Xét hàm $y = \frac{x^3}{9} - \frac{11x^2}{6} + 8x$ trong ví dụ 4 trên đoạn [0;10] ta thấy hàm có cực đại là $f_{CĐ}$ = 10,5 và cực tiểu là f_{CT} = 3.6, ở hai đầu mút f(0) = 0, f(10) = 7,8.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm trên đoạn [0;10] là min = f(0) = 0 và giá trị lớn nhất của hàm trên đoạn này là max = f(3) = 10,5.

Từ đây ta rút ra quy tắc để tìm Max (maximum ,Giá trị lớm nhất) và Min (minimum,Giá trị nhỏ nhất) của một hàm số trên một đoạn [a,b] gồm các bước :

- Tìm các cực trị nếu có trong (a;b) .
- Tính f(a) , f(b) .
- So sánh các giá trị tìm được và rút ra f_{max} , f_{min} .

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Bài tập

9.1 Tìm cực trị của các hàm số :

a) $y = x^2 - 4x - 5$ b) $y = 5 + x - x^2$ c) $y = f(t) = 1 + 6t + 3t^2$

d) $y = x^3 - x^2 - x + 2$ e) $y = x^3 - 3x + 6$ f) $y = 3x^2 - 2x^3$

g) $y = x^3 - x^4$ h) $y = x^4 - 8x^2 + 3$ i) $y = 1 - x^{2/3}$

k) $y = \frac{-8}{x^2+1}$ l) $y = \sqrt[3]{x}$.

9.2 Vẽ đồ thị của các hàm số trên.

9.3 Tìm cực trị của các hàm số :

a) $y = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ b) $y = (x+1)^{2/3}$ c) $y = x^4 - 6x^2$

d) $y = \frac{x}{x^2+1}$ e) $y = f(t) = \frac{3}{t^2+1}$ f) $y = x\sqrt{4-x^2}$

9.4 Một con kênh đào rộng 5 mét có một khúc quẹo là một góc vuông .Người ta thả các cây gỗ trôi theo kênh .Tính chiều dài tối đa cây gỗ trôi lọt qua khúc quẹo này.

9.5 Nếu hàm chi phí sản xuất là $C(x) = 1{,}1x^2 + 10x + 80$,
hàm doanh thu là $R(x) = x^2 + 100x$ (x là sản lượng).
Phải bán được bao nhiêu sản phẩm để thu được lợi nhuận tối đa ?

9.6 Một tấm nhôm vuông cạnh là 60cm, cắt bỏ đi ở mỗi góc một hình vuông nhỏ bằng nhau rồi gấp lên sẽ có một cái hộp (không có nắp) . Hình vuông bị cắt bỏ có cạnh là bao nhiêu để hộp có thể tích lớn nhất?

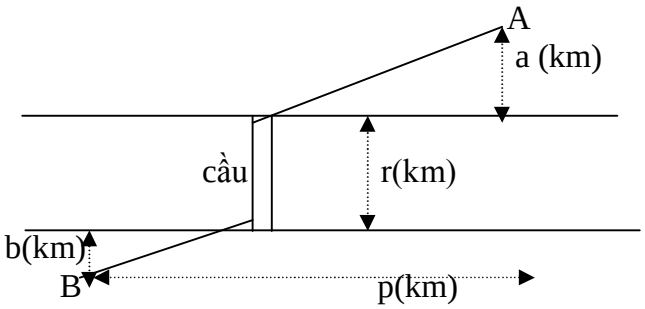
9.7 Công ty R xác định được hàm cầu là $p = 150 - 0{,}5x$ (x là số lượng, p là đơn giá), hàm chi phí sản xuất là $C(x) = 4000 + 0{,}25x^2$.

a) Tìm hàm doanh thu R(x).

b) Tìm hàm lợi nhuận P(x) , phải bán bao nhiêu sản phẩm để có lợi nhuận tối đa ?

9.8 Một đoạn thép dài 24cm được cắt làm 2 rồi uốn thành một hình vuông và một hình tròn .Phải cắt như thế nào để tổng diện tích hai hình nhỏ nhất?

9.9 Có 2 thành phố A và B hình thành ở 2 bờ của một con sông. Người ta dự kiến làm một cái cầu và 2 con đường nối 2 thành phố. Nên đặt cầu ở địa điểm nào để cho đường đi từ A tới B ngắn nhất ? (Cho a=2 ,b=3 ,r=1 ,p=5).



9.10 Tìm a và b là hai số dương đồng thời thỏa mãn : $a + b^2 = 1$ và $V = a.b^2$ lớn nhất ?

Chương II

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

TÍCH PHÂN

§1. NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

1. Nguyên hàm :

Biết f(x) = 2 , Tìm F(x) sao cho $F'(x)= 2$.
Cho $g(x) = 3x^2$, tìm G(x) sao cho $G'(x)=3x^2$
Ta có F(x)=2x ,$G(x)=x^3$
Ta gọi F(x)= 2x là nguyên hàm của f(x). G(x) là nguyên hàm của g(x).

Định nghĩa : Hàm F(x) được gọi là nguyên hàm của f(x) nếu F'(x) = f(x).

Ta thấy $F(x)= x^3$; $F(x) = x^3 + 2$; $F(x) = x^3 - 0,5$ đều là nguyên hàm của $f(x) = 3x^2$, chúng đều có dạng $x^3 + C$ với C là hằng số tuỳ ý.

Ta ký hiệu tập hợp tất cả các nguyên hàm của f(x) là $\int f(x)dx$. Nghĩa là :

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x)+C}$$

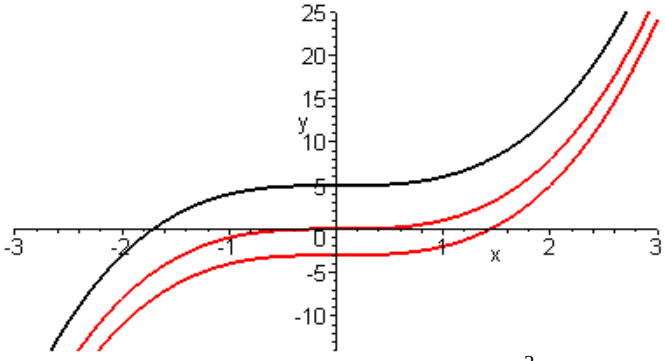
$$(\int f(x)dx = \{F(x)+C:\ F'(x) = f(x)\})$$

$\int f(x)dx$ được gọi là tích phân bất định của f(x), $\int$ là dấu tích phân ; f(x) là hàm dưới dấu tích phân; x là biến lấy tích phân.

Ví dụ 1:

a) $\int 2dx = 2x + C$ b) $\int 3x^2dx = x^3 + C$ c) $\int 2dt = 2t + C$.

Các đường cong $y = x^3 -3$, $y = x^3$, $y = x^3+5$ (H.1) là các nguyên hàm của $f(x) = 3x^2$.



H.1 Các đường cong $y = x^3+C$

2. Tìm tích phân bất định :

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

CÁC QUY TẮC CƠ BẢN

a) $\int kdx = kx + C$, k là hằng số.

b) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

c) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

d) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; n \neq -1$

Ví dụ 2 :

a) $\int \left(2 + 3x^2\right)dx = \int 2dx + \int 3x^2 dx = 2x + x^3 + C$

b) $\int 5x^2 dx = 5\int x^2 dx = 5.\frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{5}{3}x^3 + C$

Ví dụ 3:

Biến đổi trước khi sử dụng Quy tắc

a) $\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

b) $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

c) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{2/3} + 2x^{1/2} + C$

d) $\int \left(3x^4 - 5x^2 + x\right)dx = 3\left(\frac{x^5}{5}\right) - 5\left(\frac{x^3}{3}\right) + \frac{x^2}{2} + C = \frac{3}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$.

e) $\int (x+1)(x+3)dx = \int (x^2 + 4x + 3)dx = \frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + 3x + C$.

<u>Ví dụ 4</u>: Tìm hàm chi phí sản xuất:

Tại Công ty Quỳnh An, chi phí biên tế của sản phẩm thứ x là C'(x) = x^3 + 2x. Tìm hàm tổng chi phí C(x), biết định phí là 45$.

<u>Giải</u>:

C(x) = $\int C'(x)dx = \int \left(x^3 + 2x\right)dx = \frac{x^4}{4} + x^2 + K$, (ở đây K là hằng số).

Biết C(0) = 45$, ta có : C(0) = $\frac{0^2}{4} + 0^2 + K = 45$. Vậy K = 45 và $C(x) = \frac{x^4}{4} + x^2 + 45$

Bài tập

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

1.1 Kiểm tra lại các đẳng thức sau bằng cách lấy đạo hàm vế phải và thấy rằng đạo hàm này bằng với hàm dưới dấu tích phân:

a) $\int\left(-\frac{9}{x^4}\right)dx=\frac{3}{x^3}+C$

b) $\int\left(4x^3-\frac{1}{x^2}\right)dx=x^4+\frac{1}{x}+C$

c) $\int(x-2)(x+2)dx=\frac{x^3}{3}-4x+C$

d) $\int\frac{4}{\sqrt{u}}du=8\sqrt{u}+C$

1.2 Tìm các tích phân bất định:

a) $\int\left(2x^{\frac{4}{3}}+3x-1\right)dx$

b) $\int\sqrt[3]{x^2}\,dx$

c) $\int\frac{1}{x^4}dx$

d) $\int\left(2x+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

e) $\int u\left(3u^2+1\right)du$

g) $\int(x-1)(6x-5)dx$

h) $\int y^2\sqrt{y}dy$.

1.3 Tìm hàm chi phí nếu :

a) $\frac{dC}{dx}=85$; định phí : 5.500$

b) $\frac{dC}{dx}=\frac{1}{50}x+10$; định phí : 1.000$.

1.4 Tính các tích phân :

a) $\int x^6dx$

b) $\int 2dx$

c) $\int x^{\frac{1}{4}}dx$

d) $\int(x^2+x-1)dx$

e) $\int\left(t^2-2t+3\right)dt$

f) $\int 5e^{8x}dx$

g) $\int\frac{1000}{x}dx$

h) $\int\frac{-6}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

i) $\int 8e^{-2x}dx$

k) $\int(1-t)\sqrt{t}dt$

l) $\int\frac{1}{x\ln 10}dx$

m) $\int\frac{x^2-1}{x+1}dx$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

§2. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

CÁC CÔNG THỨC TÍCH PHÂN CƠ BẢN

1) $\int e^x dx = e^x + C$ 2) $\int be^{ax} dx = \frac{b}{a} e^{ax} + C$ 3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

4) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ 5) $\int \sin x dx = -\cos x + C$ 6) $\int \cos x dx = \sin x + C$

7) $\int f(u) \frac{du}{dx} dx = \int f(u) du$.

1. Vài ví dụ:

***Ví dụ 1**:* a) $\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C$

b) $\int \frac{7}{x} dx = 7 \ln|x| + C$

Ví dụ 2:

a) Tính I = $\int (3x^2 + 5)^3 6x dx$

Đặt u = $3x^2$ +5 ; $\frac{du}{dx} = 6x$; f(u) = u^3 . Có :

I = $\int f(u) \frac{du}{dx} dx = \int f(u) du = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{(3x^2+5)^4}{4}$

b) I = $\int 4e^{4x} dx$

Đặt u = 4x; $\frac{du}{dx} = 4$; f(u) = e^u . Có :

I = $\int f(u) \frac{du}{dx} dx = \int f(u) du = \int e^u du = e^u + C = e^{4x} + C$

c) Tính I = $\int 2x\sqrt{3x^2+1} dx$

Đặt u = $3x^2$ + 1 ; $\frac{du}{dx} = 6x$; f(u) = $u^{1/2}$. Có :

I = $\frac{1}{3}\int 6x\sqrt{3x^2+1} dx = \frac{1}{3}\int f(u) du = \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{3}\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = 2(3x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C$

2. Tích phân bằng phương pháp đổi biến :

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Nhớ lại công thức tính vi phân hàm số : dy = y'dx. ($y' = \frac{dy}{dx}$)

Ví dụ 3 :

a) Cho y = x^3 , tìm dy .

$\frac{dy}{dx} = 3x^2$ nên dy = $3x^2dx$

b) Cho u = lnx, tìm du .

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ nên $du = \frac{1}{x}dx$

c) Cho y = e^{x^2} , tìm dy .

$\frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2}$ nên $dy = 2xe^{x^2}dx$

Ví dụ 4:

Đổi biến để tính tích phân

a) Tính I = $\int \frac{2x}{1+x^2}dx$

Thấy tử số chính là đạo hàm của mẫu . Đặt u = 1 + x^2 ; du = 2xdx . Có :

$I = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln(1+x^2) + C$ (bỏ dấu giá trị tuyệt đối vì 1 + x^2 > 0)

b) Tính $I = \int \frac{2x}{(1+x^2)^2}dx$

Thấy tử số là đạo hàm của phần trong ngoặc ở mẫu. Đặt u = 1 + x^2 ;du = 2xdx Có :

$I = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}du = \frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{1+x^2} + C$

c) Tính I = $\int \frac{7x}{(1+x^2)^2}dx$

Đặt u = 1 + x^2 ; du = 2xdx. Có :

$I = 7.\frac{1}{2}\int \frac{2x}{(1+x^2)^2}dx = \frac{7}{2}\int \frac{du}{u^2} = \frac{7}{2}(-\frac{1}{u}) + C = -\frac{7}{2}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + C$

d) Tính I = $\int \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}dx$

Đặt u = 1 + e^{3x} ; du = $3e^{3x}$ dx. Có :

$I = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{3}\ln|u| + C = \frac{1}{3}\ln(1+e^{3x}) + C$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

3. Phương pháp tích phân từng phần :

Nhớ lại rằng (uv)' = u'v + uv', hay $\frac{d(uv)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$

Ta lấy tích phân hai vế theo x , ta có:

$\int d(uv) = uv = \int vdu + \int udv$, từ đây có công thức :

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Ví dụ 5:

a) Tính $I = \int xe^x dx$

Đặt u = x thì du = dx

$dv = e^x dx$ thì $v = \int e^x dx = e^x$ (ta bỏ C vì sẽ bị triệt tiêu sau này).

Do đó $I = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + K$

b) Tính $I = \int x\sqrt{x-1}dx$

Đặt u = x - 1 thì du = dx và x = u + 1, có:

$$I = \int (u+1)u^{\frac{1}{2}}du = \int \left(u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right)du = \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$$

c) Tính $\int x\sin x dx$. Đặt u = x , dv = sinxdx

d) Tính $\int x\ln x dx$. Đặt u = lnx, dv = xdx

e) Tính $\int x^2 e^x dx$. Đặt u = x^2 và sử dụng công thức tích phân từng phần hai lần.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Bài tập

2.1 Tính các tích phân:

a) $\int (x-2)^4 dx$ b) $\int \frac{2}{(t-9)^2} dt$ c) $\int \sqrt{1+x} dx$

d) $\int \frac{12x+2}{3x^2+x} dx$ e) $\int \frac{1}{(5x+1)^3} dx$ g) $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$

h) $\int \frac{e^{3x}}{1-e^{3x}} dx$ i) $\int \frac{x^2}{x-1} dx$ k) $\int x\sqrt{x^2+4} dx$

2.2 Tính các tích phân:

a) $\int e^{5x} dx$ b) $\int \frac{x}{(x+1)^4} dx$ c) $\int \frac{x}{(3x-1)^2} dx$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{t}-1} dt$ e) $\int \frac{2\sqrt{t}+1}{t} dt$ g) $\int xe^{3x} dx$

h) $\int x^2 e^{-x} dx$ i) $\int \ln 2x dx$ k) $\int xe^{x^2} dx$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

§3. TÍCH PHÂN CỦA PHÂN THỨC HỮU TỶ $\frac{p(x)}{q(x)}$

Để tính tích phân I = $\int \frac{x+7}{x^2-x-6}dx$ người ta đã biến đổi như sau :

$$\frac{x+7}{x^2-x-6} = \frac{x+7}{(x-3)(x+2)} = \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x+2}$$

Vậy: $I = \int\left(\frac{2}{x-3} - \frac{1}{x+2}\right)dx = 2\ln|x-3| - \ln|x+2| + C$.

****** Quy tắc chung tính tích $\frac{p(x)}{q(x)}$ phân của với p(x) , q(x) là đa thức :***

Tiến hành các bước sau :

- Thực hiện chia đa thức nếu bậc của p(x) lớn hơn hoặc bằng bậc của q(x): $\frac{p(x)}{q(x)} = p_1(x) + \frac{p_2(x)}{q(x)}$.
- Thừa số hoá *q(x).*
- Bằng phương pháp đồng nhất hệ số đổi $\frac{p_2(x)}{q(x)}$ thành tổng của các phân thức đơn giản .

Ví dụ 1:

a) Tính I = $\int \frac{x+7}{x^2-x-6}dx$

Thừa số hoá mẫu số. Ta có: x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) (với 3 và -2 là 2 nghiệm của phương trình x^2 - x - 6 = 0). Từ đó ta phân tích:

$$\frac{x+7}{x^2-x-6} = \frac{x+7}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)}$$

Vậy $\frac{x+7}{x^2-x-6} = \frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)}$

Để ý tới 2 tử số ở hai vế [x + 7] và [A(x+2) + B(x-3)].

Cho x = -2 , có vế trái là [-2+7 = 5] và vế phải là $[-5B]$ $\Rightarrow$ -5B = 5 $\Rightarrow$ B = -1.

Cho x = 3, có vế trái [3+7 = 10] và vế phải là [5A] , suy ra A = 2 .

Vậy $\frac{x+7}{x^2-x-6} = \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x+2}$ nên

$$\boxed{\int \frac{x+7}{x^2-x-6}dx = \int\left(\frac{2}{x-3} - \frac{1}{x+2}\right)dx = 2\ln|x-3| - \ln|x+2| + C}$$

b) Tính $I = \int \frac{x+7}{(x-3)(x+2)^2}dx$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Tương tự ta viết: $\frac{x+7}{(x-3)(x+2)^2}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$

Và sau các bước biến đổi ta có: $\frac{x+7}{(x-3)(x+2)^2}=\frac{2}{5(x-3)}-\frac{2}{5(x+2)}-\frac{1}{(x+2)^2}$

nên ta có: $I=\frac{2}{5}\ln|x-3|-\frac{2}{5}\ln|x+2|+\frac{1}{x+2}+C$

c) Tính $I=\int\frac{x+7}{(x+2)x^3}dx$

Ta viết $\frac{x+7}{(x+2)x^3}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}+\frac{D}{x^3}$

Và sau các bước biến đổi ta có : $\frac{x+7}{(x+2)x^3}=-\frac{5}{8(x+2)}+\frac{5}{8x}-\frac{5}{4x^2}+\frac{7}{2x^3}$

Vậy $I=\int\frac{x+7}{(x+2)x^3}dx=\int(-\frac{5}{8(x+2)}+\frac{5}{8x}-\frac{5}{4x^2}+\frac{7}{2x^3})dx$

$$=\frac{-5}{8}\ln|x+2|+\frac{5}{8}\ln|x|+\frac{5}{4x}-\frac{7}{4x^2}$$

d) Tính $I=\int\frac{x^5+x-1}{x^4-x^3}dx$.

Giải:

Thực hiện phép chia : $\frac{x^5+x-1}{x^4-x^3}=\quad x+1+\frac{x^3+x-1}{x^4-x^3}$

Ta có: $\frac{x^3+x-1}{x^4-x^3}=\quad\frac{x^3+x-1}{x^3(x-1)}=\quad\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x-1}=\frac{Ax^2(x-1)+Bx(x-1)+C(x-1)+Dx^3}{x^3(x-1)}$

$=\frac{Ax^3-Ax^2+Bx^2-Bx+Cx-C+Dx^3}{x^3(x-1)}=\frac{x^3(A+D)+x^2(-A+B)+x(-B+C)-C}{x^3(x-1)}$.

Vậy $\frac{x^3+x-1}{x^4-x^3}=\frac{x^3(A+D)+x^2(-A+B)+x(-B+C)-C}{x^4-x^3}$

Để $x^3+x-1=x^3(A+D)+x^2(-A+B)+x(-B+C)-C$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}A+D=1\\-A+B=0\\-B+C=1\\-C=1\end{cases}\Rightarrow A=0,\quad B=0,\quad C=1,\quad A=1.$$

Vậy : $\frac{x^5+x-1}{x^4-x^3}=x+1+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x-1}$

Do đó:

$$I=\int\frac{x^5+x-1}{x^4-x^3}dx=\int\left(x+1+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x-1}\right)dx=\quad\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{2x^2}+\ln|x-1|+K\ .$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Bài tập

3.1 Tính các tích phân :

a) $\int \frac{1}{x^2-1}dx$ b) $\int \frac{-2}{x^2-16}dx$ c) $\int \frac{dx}{3x^2-x}$

d) $\int \frac{3dx}{x^2+x-2}$ e) $\int \frac{5-x}{2x^2+x-1}dx$ g) $\int \frac{4-3x}{(x-1)^2}dx$

h) $\int \frac{3x^2+3x+1}{x(x^2+2x+1)}dx$. i) $\int \frac{3x^2-4}{(x+1)(x+2)(x-3)}dx$

3.2 Công ty cho biết chi phí biên tế để sản xuất ra sản phẩm thứ x là $\frac{dC}{dx}=\frac{5x}{\sqrt{x^2+1000}}$, khi x = 225 thì chi phí là 1136,06 $. Tìm chi phí để sản xuất :

a) 500 sản phẩm? b) 1000 sản phẩm ?

3.3 Ký túc xá có 500 công nhân , sáng chủ nhật lúc 8 giờ có 6 công nhân đưa tin " siêu thị giảm giá 20% ". Đến 10 giờ đã có 180 công nhân biết tin này. Cho rằng tốc độ truyền tin là $\frac{dN}{dt}=kN(500-N)$. N là số người biết tin, t: thời gian (giờ), k là hằng số chưa biết.

a) Tìm hàm N = N(t)

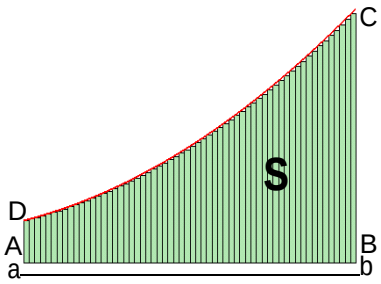
b) Đến 2 giờ chiều số người biết tin là bao nhiêu ?

c) Đến mấy giờ thì có 90% số người trong ký túc xá biết tin ?

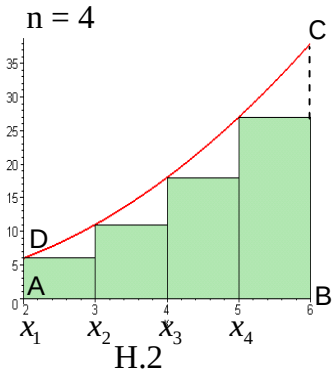
Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

§4. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

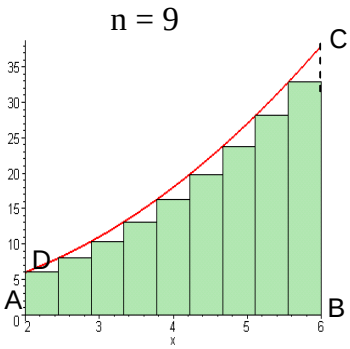
1. Bài toán diện tích :



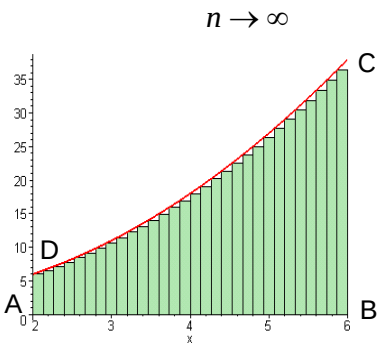
H.1



H.2



H.2



H.3

Để tính diện tích hình thang cong ABCD (H.1) ta chia đoạn (a; b) thành 4 phần bằng nhau độ dài mỗi đoạn là $\Delta x = \frac{b-a}{4}$ (H.2). Nếu diện tích thực sự của hình thang cong ABCD la S thì

S ≈ Tổng diện tích 4 hình chữ nhật :

$$S = f(x_1).\Delta x + f(x_2).\Delta x + f(x_3).\Delta x + f(x_4)\Delta x = \sum_{i=1}^{4} f(x_i).\Delta x \quad (H.2)$$

Đặt $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ta thấy nếu n càng lớn , Δx càng nhỏ và tổng các hình chữ nhật $\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x$ càng gần với S (H.2 và H.3), nghĩa là $S = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x$ và gọi đây là tích phân xác định của f(x) trên [a,b].

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Ta ký hiệu: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x$

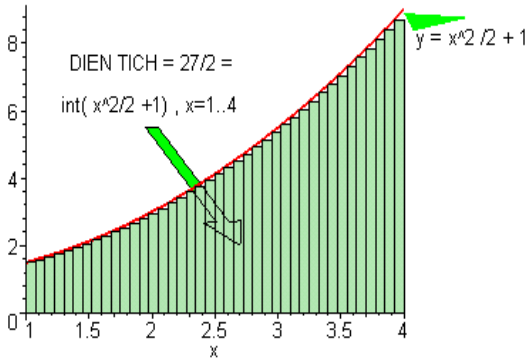
(a đọc là cận dưới, b là cận trên của tích phân xác định).
Nếu giới hạn này tồn tại ta nói là f(x) khả tích trên [a;b].

Công thức Niutơn-Lepnit :

Nếu hàm f(x) liên tục trên [a;b] , có nguyên hàm là F(x) thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Ví dụ 1: Tính diện tích hình thang cong ABCD trên hình H.4 ,giới hạn bởi các đường $y = \frac{x^2}{2} + 1$,trục Ox , hai đường thẳng x =1 và x = 4 .



H.4 f(x)= $\frac{x^2}{2} + 1$

Giải:

Dùng công thức trên có :

$$S = \int_1^4 \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)dx = \left(\frac{x^3}{6} + x\right)\Big|_1^4 = \left(\frac{4^3}{6} + 4\right) - \left(\frac{1^3}{6} + 1\right) = \frac{27}{2} \quad \text{(đvdt)}$$

2. Các tính chất:

Nếu f(x) và g(x) là các hàm liên tục trên đoạn [a;b] thì :

a) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$; k : hằng số.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

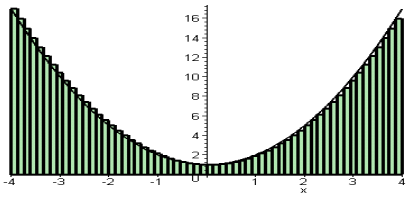
b) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

c) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ với a < c < b

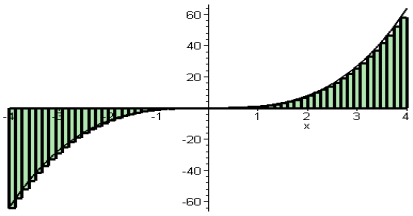
d) $\int_a^a f(x)dx = 0$ e) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

- Nếu f(x) là hàm chẵn (tức là f(-x) = f(x)) thì : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$. (H.5)

- Nếu f(x) là hàm lẻ (tức là f(-x) = - f(x)) thì : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$. (H.6)



H.5. Hàm chẵn f(x) = x^2+1, $\int_{-4}^{4}(x^2+1)dx$



H.6. Hàm lẻ f(x) = x^3 , $\int_{-4}^{4} x^3 dx$

3. Giá trị trung bình của hàm số:

Nếu f(x) liên tục trên [a;b] thì giá trị trung bình của f(x) trên đoạn này là :

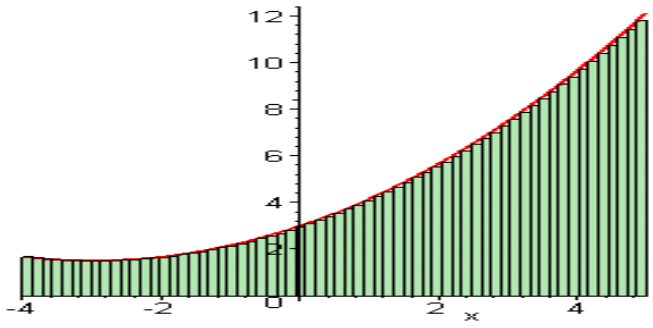
$$\bar{f}(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Ví dụ 2:

Cho f(x) $= \frac{1}{6}x^2 + x + 3$, tìm giá trị trung bình của hàm số trên [-4 ;5].

$\int_{-4}^{5}(\frac{1}{6}x^2 + x + 3)dx = 42$ Vậy $\bar{f}(x) = \frac{42}{9} = 4{,}67$ (H.7)

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)



H.7. $f(x)=\frac{1}{6}x^2+x+3$

Ví dụ 3:

Hàm chi phí sản xuất một loại sản phẩm là :

$C = 0{,}005t^2 + 0{,}001t + 13{,}15$ ($) , $t \geq 0$

t: thời gian (tháng) .

Tìm chi phí sản xuất trung bình cho một sản phẩm trong năm thứ 2.

Giải:

Ta tính giá trị trung bình của C trên đoạn [12; 24]:

$$\bar{C} = \frac{1}{12}\int_{12}^{24}\left(0{,}005t^2 + 0{,}01t + 13{,}15\right)dt$$

$$= \frac{1}{12}\left[\frac{0{,}005t^3}{3} + \frac{0{,}01t^2}{2} + 13{,}15t\right]\Bigg|_{12}^{24} = 15{,}01(\$)$$

4. Diện tích giới hạn bởi hai đường cong:

Nếu f(x) và g(x) liên tục trên [a;b] và g(x) ≤ f(x) thì diện tích của miền giới hạn bởi các đồ thị f(x) , g(x) , x = a , x = b là :

$$\boxed{A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx}.$$

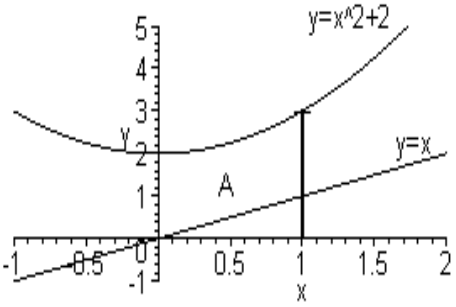
Ví dụ 4:

a) Tìm diện tích miền giới hạn bởi đồ thị của $f(x) = x^2 + 2$ và $g(x) = x$ trên đoạn [0;1]. (H.8)

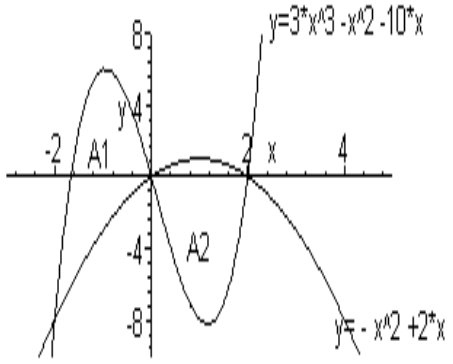
Giải :

$$A = \int_0^1 [(x^2+2) - x]dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]\Bigg|_0^1 = \frac{11}{6}$$ ñôn vò dieän tích .

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)



H.8. $y = x^2+2$ và $y = x$



H.9 $y = 3x^3-x^2-10x$ và $y = - x^2 +2x$

b) Tính diện tích miền giới hạn bởi 2 đồ thị $f(x) = 3x^3 - x^2 -10x$ và $g(x) = -x^2 + 2x$. (H.9)

Giải :

Tìm giao điểm của 2 đồ thị

$$3x^3 - x^2 -10x = - x^2 + 2x$$
$$3x^3 - 12x = 0$$
$$3x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 ; \ 2 ; \ -2.$$

Đồ thị cắt nhau tại 3 điểm.

Diện tích cần tìm là A : $A = A_1+A_2$

$$A_1 = \int_{-2}^{0}[(3x^3 - x^2 -10x) - (-x^2 + 2x)]dx = \int_{-2}^{0}(3x^3 -12x)dx = \left[\frac{3x^4}{4} - 6x^2\right]\Big|_{-2}^{0} = 12$$

$$A_2 = \int_{0}^{2}\left[(-x^2 + 2x) - (3x^3 - x^2 -10x)\right]dx = \int_{0}^{2}\left(-3x^3 +12x\right)dx = \left[-\frac{3x^4}{4} + 6x^2\right]\Big|_{0}^{2} = 12 .$$

Vậy : $A = A_1 + A_2 = 24$ (đvdt) .

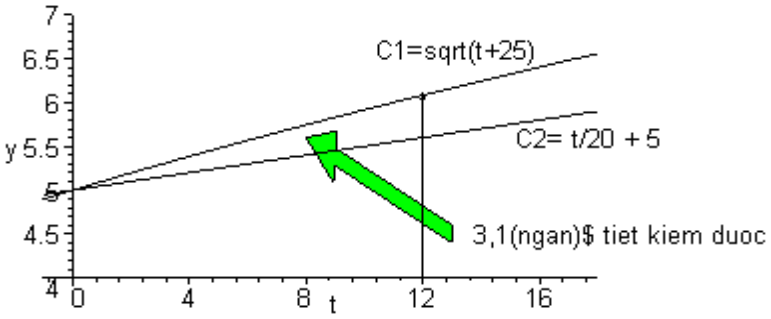
Ví dụ 5 :

Đầu năm công ty Tiền phong dự kiến chi phí điện cho văn phòng công ty cả năm là $C_1(t) = \sqrt{t+25}$ (ngàn \$), (t: tháng). Nhờ chính sách tiết kiệm nên cuối năm công ty nhận thấy tiêu thụ thực tế luôn thấp hơn dự kiến và có phương trình là $C_2(t) = \frac{t}{20} + 5$ .Tính ra cả năm công ty tiết kiệm được bao nhiêu? (H.10)

Giải:

$$\int_{0}^{12}(C_1 - C_2)dt = \int_{0}^{12}\left(\sqrt{t+25} - \frac{t}{20} - 5\right)dt = \left[\frac{2}{3}(t+25)^{\frac{3}{2}} - \frac{t^2}{40} - 5t\right]\Big|_{0}^{12} = 3{,}1 \text{ (ngàn\$)}$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)



H.10 $C_1(t) = \sqrt{t+25}$; $C_2(t) = \frac{t}{20} + 5$

5. Dùng máy tính bỏ túi

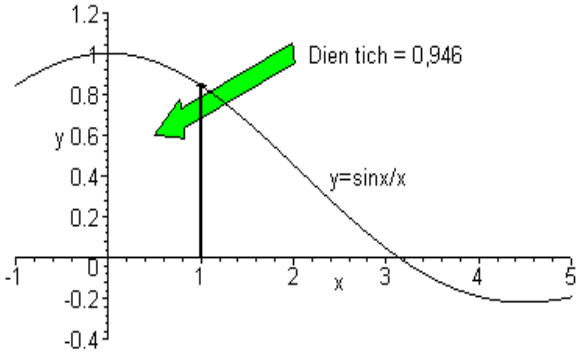
Ví dụ 6 : Phải tính $\int_0^1 \frac{\sin}{x} dx$ .Ta chia đoạn [0;1] thành 5 phần như vậy $\Delta x = 0{,}2$, cho $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, dùng máy tính tính được :

x	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
f(x)	0,993	0,974	0,941	0,897	0,842

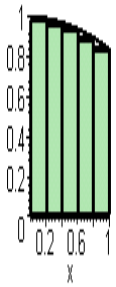
$\int_0^1 \frac{\sin}{x} dx$ ≈ Tổng diện tích 5 hình chữ nhật =

0,2 .(0,993 + 0,97 4+……..+ 0,842)=0,2 x 4,641 = 0,929 (H.12) (Tất nhiên là Δx càng nhỏ thì độ chính xác càng cao)

Diện tích đúng là 0,946 (H.11).



H.11. Diện tích là 0,946



H.12. Diện tích là 0,929

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Bài tập

4.1 Tính các tích phân xác định :

a) $\int_0^5 (x+1)dx$ b) $\int_{-1}^0 (2x+1)dx$ c) $\int_0^1 (2t-1)^2\,dt$

d) $\int_{-1}^1 \left(\sqrt[3]{t}-2\right)dt$ e) $\int_{-1}^0 \left(t^{1/3}-t^{2/3}\right)dt$ g) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$

h) $\int_0^1 e^{-2x}dx$ i) $\int_{-1}^1 |4x|dx$ k) $\int_{-1}^2 \frac{x}{x^2-9}dx$

l) $\int_0^3 \frac{2e^x}{2+e^x}dx$.

4.2 Tốc độ tăng trưởng (về doanh thu) của một ngành công nghiệp từ năm 1985 đến 1994 là : $\frac{dR}{dt} = 1{,}62t + 21{,}14e^{-t}$; Với R : doanh thu (tỷ \$) và t = 0 ứng với năm 1985 . Biết doanh thu của năm 1985 là 45,1 (tỷ \$).

a) Tìm hàm doanh thu R = R(t).
b) Tìm doanh thu trung bình một năm trong thời gian từ 1985 đến 1994.

4.3 Tìm diện tích giới hạn bởi đồ thị của :

a) $f(x) = x^2 - 6x$ và $g(x) = 0$.
b) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ và $g(x) = -x^2 + 2x + 3$
c) $f(x) = 3(x^3 - x)$ và $g(x) = 0$.
d) $f(x) = e^x - 1$, $g(x) = 0$ và $x=1$.
e) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2 - x^2$ và $x = 0$
f) $f(x) = \cos x$ và $g(x) = x^2$
g) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2 - x$ và $y = 0$.

4.4 Dùng máy tính bỏ túi tính gần đúng các tích phân :

a) $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ b) $\int_2^4 \sqrt{x^3+1}\,dx$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

§5. ĐỔI BIẾN VÀ TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN TRONG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

1. Đổi biến và đổi cận

Ví dụ 1: Tính $I = \int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx$

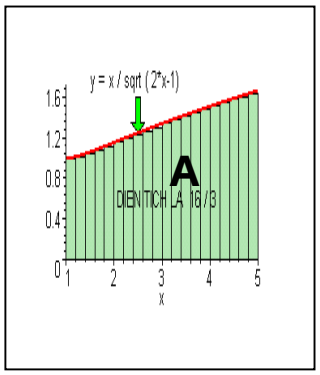
Giải:

Đặt u = $\sqrt{2x-1}$ $\Rightarrow$ $u^2 = 2x-1$ $\Rightarrow x = \frac{u^2+1}{2}$ $\Rightarrow$ $dx = udu$. Các cận:

$x = 1$ thì u = $\sqrt{2-1} = 1$, $x = 5$ thì u = $\sqrt{10-1} = 3$

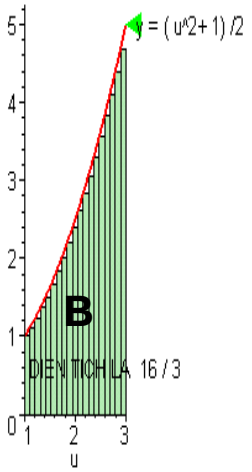
Có $I = \int_1^3 \frac{1}{u}\left(\frac{u^2+1}{2}\right)udu = \frac{1}{2}\int_1^3 (u^2+1)du = \frac{1}{2}\left(\frac{u^3}{3}+u\right)\Big|_1^3 = \frac{1}{2}\left[(9+3)-(\frac{1}{3}+1)\right] = \frac{16}{3}$

Ta đã không trở lại với biến cũ (x) mà dùng biến mới (u) nhưng phải nhớ đổi cận. (H.1 và H.2). Diện tích đều là $\frac{16}{3}$



Diện tích A = $\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx$

H.1 Sử dụng biến x



Diện tích B= $\frac{1}{2}\int_1^3 (u^2+1)du$

H.2 Sử dụng biến u

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

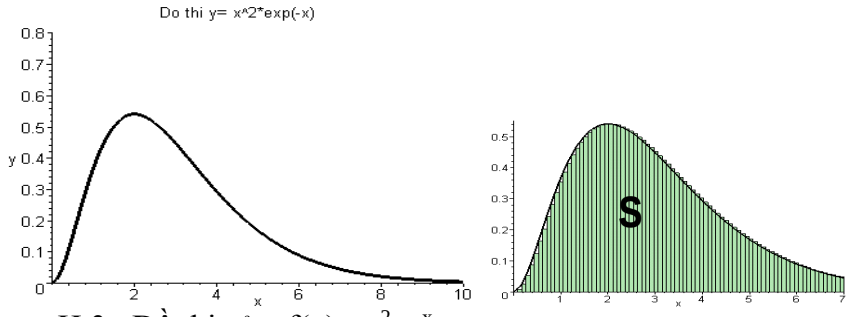
2. Tích phân từng phần : Công thức $\boxed{\int_a^b udv = [u.v]\Big|_a^b - \int_a^b vdu}$

Ví dụ 2:

Tính $I = \int_0^1 xe^x dx$

I = $(xe^x)\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx$ = $1e^1 - 0e^0 - (e^1 - e^0)$ = e^0 =1.

Ví dụ 3: Tính diện tích phần gạch chéo trên hình vẽ.(H.3)



H.3 Đồ thị của $f(x)= x^2.e^{-x}$

Giải:

Diện tích $S = \int_0^7 x^2 e^{-x} dx$.

Trước hết tính $I = \int x^2 e^{-x} dx$.

Đặt $u = x^2$ có $du = 2xdx$

$dv = e^{-x}$ suy ra $v = -e^{-x}$

Theo công thức tích phân từng phần:

$$I = x^2(-e^{-x}) - \int -e^{-x}(2xdx) = -x^2e^{-x} + \int 2xe^{-x}dx$$

Để tính tích phân còn lại ở vế phải ta đặt :

$u = 2x$, có $du = 2dx$,

$dv = e^{-x}dx$ suy ra $v = -e^{-x}$.

Từ đó $\int 2xe^{-x}dx = -2xe^{-x} - \int -e^{-x}(2dx) = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + C.$

Vậy $I = -x^2(e^{-x}) - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C = e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C$.

Từ đây $S = \int_0^7 x^2 e^{-x} dx = \left[e^{-x}(x^2 + 2x + 2)\right]_0^7 = -65e^{-7} + 2 \approx 1{,}94$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Bài tập

5.1 Tính các tích phân :

a) $\int \frac{3x^2}{7+x^3}dx$ b) $\int e^{3x}dx$ c) $\int x^3 e^{x^4}dx$ d) $\int \frac{\ln 4x}{x}dx$

e) $\int \frac{dx}{4-x}$ g) $\int (x^4+x^3+x^2)^7(4x^3+3x^2+2x)dx$

h) $\int \frac{e^x dx}{4+e^x}$ i) $\int_0^1 2xe^{x^2}dx$ j) $\int_1^4 \frac{2x+1}{x^2+x-1}dx$

5.2 Tính các tích phân :

a) $\int xe^{-2x}dx$ b) $\int x^2 \ln x dx$ c) $\int x \ln x^2 dx$

d) $\int \ln(x+3)dx$ g) $\int (x+2)\ln x dx$ h) $\int x\sqrt{x+2}dx$

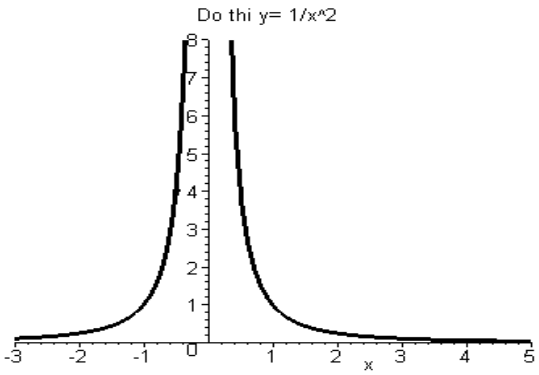
i) $\int x^2 e^{2x}dx$ k) $\int_1^2 x^2 \ln x dx$ l) $\int_2^6 \ln(x+3)dx$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

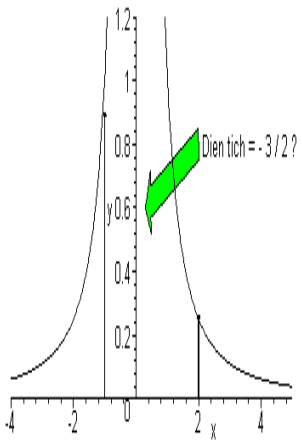
§6. TÍCH PHÂN SUY RỘNG

Có người đã tính tích phân $I = \int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2}$ như sau :

$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{2} = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$. Ta thấy bất hợp lý khi so sánh $-\frac{3}{2}$ với phần diện tích tương ứng (H.1)



H.1 Diện tích bằng $-\frac{3}{2}$?



H.2

Sai là ở chỗ hàm f(x) = $\frac{1}{x^2}$ gián đoạn trên [-1; 2], cụ thể là không bị chặn tại x = 0, do đó không thể sử dụng công thức Niutơn - Lebnit.

1. Tích phân của hàm không bị chặn :

f(x) gọi la không bị chặn tại x_0 nếu $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$

Ví dụ: $f(x) = \frac{3}{x-6}$ không bị chặn tại x =6.

Định nghĩa : Nếu f(x) liên tục trên [a;b) và $\lim_{x \to b^-} |f(x)| = \infty$ thì ta gọi tích phân suy rộng của f(x) trên [a;b] là :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

Nếu giới hạn này tồn tại , ta nói tích phân hội tụ (ngược lại thì nói tích phân phân kỳ).

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Ví dụ 1: Tính $I = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2}$

Giải :

$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to 0^-} \left(\int_{-1}^{t} \frac{dx}{x^2} \right) = \lim_{t\to 0^-} \left(-\frac{1}{x} \right)\Big|_{-1}^{t} = \lim_{t\to 0^-} \left(-\frac{1}{t} - 1 \right) = \infty$. Vậy tích phân phân kỳ.

Tương tự , trong trường hợp f(x) không bị chặn ở cận dưới ta có định nghĩa sau : Nếu f(x) liên tục trên (a;b] và $\lim_{x\to a^+} |f(x)| = \infty$ thì ta gọi tích phân suy rộng của f(x) trên [a;b] là $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$.

2. Tích phân có cận ở vô cùng :

Định nghĩa : Nếu f(x) liên tục trên $[a, +\infty)$ thì tích phân suy rộng

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx$$

Nếu giới hạn này tồn tại ta nói tích phân hội tụ (ngược lại thì tích phân phân kỳ).

Ví dụ 2: Tính $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ (H.1)

Giải :

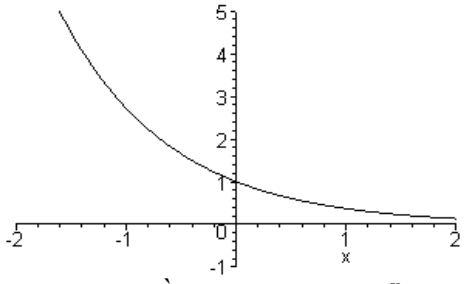
$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to+\infty} \left(\int_1^{t} \frac{dx}{x^2} \right) = \lim_{t\to+\infty} \left(-\frac{1}{x} \right)\Big|_1^{t} = \lim_{t\to+\infty} \left(-\frac{1}{t} + 1 \right) = 1$. Tích phân hội tụ.

(Với tích phân $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ ta định nghĩa tương tự)

Ví dụ 3 :

Để tính tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}dx$ ta phải tách thành hai tích phân $\int_{-\infty}^{0} e^{-x}dx$ và $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$.(H.3)

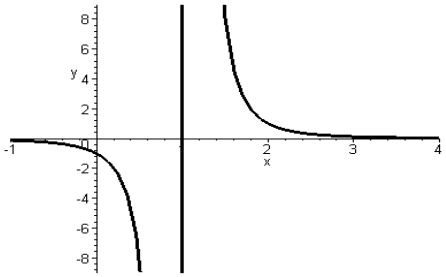
Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)



H.3 Đồ thịcủa $f(x) = e^{-x}$.

Ví dụ 4:

Để tính tích phân $\int_{-1}^{4} \frac{dx}{(x-1)^3}$, vì $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$ không bị chặn tại x = 1, ta tách thành 2 tích phân suy rộng $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x-1)^3}$ và $\int_{1}^{4} \frac{dx}{(x-1)^3}$. (H.4)



H.4 Đồ thị của $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$.

****

Bài tập

6.1 Tính các tích phân :

a) $\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx$ b) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$ c) $\int_{5}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-16}}$

d) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{|x|}dx$ e) $\int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ f) $\int_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$

g) $\int_{0}^{9} \frac{dx}{\sqrt{9-x}}$ h) $\int_{3}^{4} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-9}}$ i) $\int_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

k) $\int_{0}^{1} \ln x dx$ l) $\int_{0}^{+\infty} xe^{x}dx$ m) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Chương III

HÀM NHIỀU BIẾN

§1. KHÁI NIỆM VỀ HÀM NHIỀU BIẾN

****

Bài toán 1 : Công ty M. bán 2 loại hàng A và B ; bán một sản phẩm A lãi 2$; Một sản phẩm B lãi 3$. Tổng lợi nhuận tính được là P = 2x + 3y (x và y là số sản phẩm A, B tương ứng bán được).

Ta có một hàm 2 biến P(x,y) = 2x + 3y.

x=10 ,y = 20 thì P=2.10 + 3.20 = 80 ta viết P (10;20) = 80 …

Định nghĩa: Nếu với một cặp số (x,y) xác định được duy nhất một số z ta gọi z là hàm của x và y, ký hiệu z = f(x,y).

Ví dụ1 : Hàm ba biến

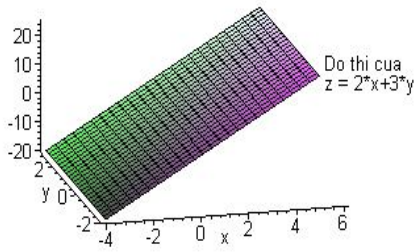
u = f(x,y,z) = $3xy + xz^2$.

Khi đó f(0,0,0) = 0 (x = 0, y = 0 , z = 0 thì u = 0) ,

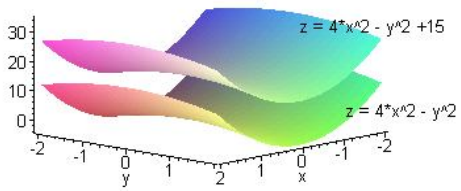
f(1,1,2) = $3.1.1 + 1.2^2$ = 7.

Trong chương này ta chỉ nghiên cứu chủ yếu các hàm 2 biến.

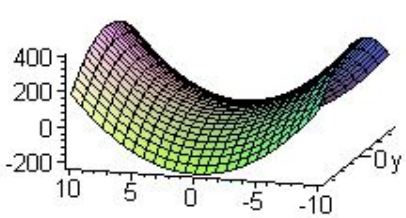
Đồ thị của hàm 2 biến : Để vẽ đồ thị hàm 2 biến ta cần hệ trục tọa độ Oxyz vuông góc.

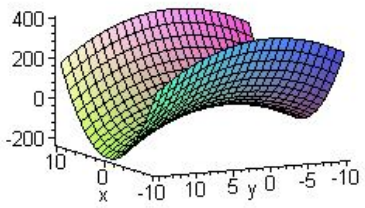


H.1 Đồthị z= 2x+3y



H.2





H.3 Đồ thị $z = 4x^2 - y^2$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Đồ thị của z = f(x,y) là một mặt , tập hợp của tất cả các điểm có toạ độ (x, y ,f(x,y)).

§2. ĐẠO HÀM RIÊNG

1 . Định nghĩa :

Nếu trong hàm z=f(x,y) ta cố định y thì ta có hàm một biến, biến số là x, có thể lấy đạo hàm theo *x* của hàm một biến này theo cách quen thuộc . Đạo hàm này gọi là đạo hàm riêng .

Cho z = f(x,y) , đạo hàm riêng của z theo x là :

$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$ còn ký hiệu là $\frac{\partial z}{\partial x}$; z'_x; f'_x

Tương tự đạo hàm riêng của f(x,y) theo y là

$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$ còn ký hiệu là $\frac{\partial z}{\partial y}$; z'_y; f'_y

Để tính $\frac{\partial f}{\partial x}$ ta coi y là hằng số và tính đạo hàm như là hàm một biến. Để tính $\frac{\partial f}{\partial y}$ ta coi x là hằng số .

Ví dụ 1: Cho $z = f(x,y) = x^2+3y+7$ thì $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$ và $\frac{\partial z}{\partial y} = 3$.

Ví dụ 2: Với $z = f(x,y) = x^2 y + 2xy + 5$ có $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 2y$ và $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2x$.

Ví dụ 3 : $z = x^2 + 3y + \frac{x}{y}$ thì $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + \frac{1}{y}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 3 - \frac{x}{y^2}$

.

Ví dụ 4: **a)** Cho $z = 2x + y^2 + (5x+7y)^2$, thì

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 + 2.(5x+7y).5$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2.(5x+7y).7$

b) Cho $u = 2x + \cos y + xy$ thì $\frac{\partial u}{\partial x} = 2 + y$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\sin y + x$.

2. Hàm sản lượng Cobb - Douglas :

Đó là hàm $Q(x,y) = Ax^a . y^{1-a}$, (A > 0 và 0 < a < 1),
Q : giá trị sản lượng; *x* : chi phí nhân công; *y :* vốn.

Ví dụ 5: Một nhà máy có hàm sản lượng là : $Q(x,y) = 50x^{2/3}y^{1/3}$. (H.1)

a) Tìm sản lượng khi chi phí nhân công là 125 đơn vị và vốn là 64 đơn vị.

b) Tìm sản lượng biên tế theo x khi y= 64 và x = 125.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

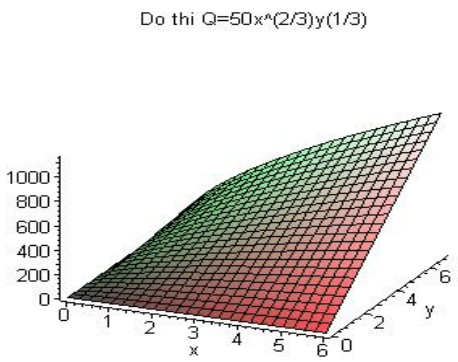
Giải:

a) Q(125,64) = $50.(125)^{2/3}(64)^{1/3}$ = 5.000 đơn vị.

b) $\frac{\partial Q}{\partial x} = 50.\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} = \frac{100}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$

với y = 64 , x = 125 thì $\frac{\partial Q}{\partial x}\Big|_{(125,64)} = \frac{100}{3}\left(\frac{64}{125}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 27$.

Nghĩa là tại mức vốn y = 64 (cố định) và mức chi phí nhân công x = 125 thì tăng 1 đơn vị nhân công sẽ làm tăng (khoảng) 27 đơn vị giá trị sản lượng.



****

Bài tập

2.1 a) Cho f(x,y) = x^2 - 2y. Tìm f(0,-2) và f (2,3).

b) Cho f(x,y) = 3^x + 7xy. Tìm f(0,-2) ; f(-2,1).

c) Cho f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2 . Tìm f(-1,2,3) và f(2,-1,3).

2.2 Tìm, , $\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}; \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(-2,3)}; \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,-5)}$ với :

a) z = 2x - 3xy b) z = $3x^2$ - 2xy + y

2.3 Tìm f'$_x$ và f'$_y$:

a) f(x,y) = 2x-3xy b) f(x,y) = $3x^2$-2xy+y c) f(x,y) = $5\sqrt{x} - 6y^2$

d)f(x,y) = $\frac{x}{y}$ e) f(x,y)= x^2e^{2y} g) f(x,y)= $e^{-(x^2+y^2)}$

2.4 Tìm f'$_x$ và f'$_y$:

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ b) $f(x,y) = e^{2x+3y}$

c) $f(x,y) = e^{xy}$ d) $f(x,y) = y.\ln(x+y)$

e) $f(x,y) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ g) $f(x,y) = 3(2x+y-5)^2$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

§3. ĐẠO HÀM CẤP CAO - CỰC TRỊ

1. Đạo hàm cấp cao:

Cho $z = f(x,y) = 3xy^2 + 2xy + x^2$. Ta có : $\frac{\partial z}{\partial x} = 3y^2 + 2y + 2x$

Lấy đạo hàm tiếp tục theo biến y ta có : $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(3y^2 + 2y + 2x\right)'_y = 6y + 2$

Ta ký hiệu : $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{xy} = 6y + 2$ và *gọi đây là đạo hàm cấp 2 hỗn hợp* .

Ví dụ 1 : Cho $z = f(x,y) = x^3y + 2xy + y^3$. Tìm các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai .

Giải :

Ta có : $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y + 2y$,

Đạo hàm thêm một lần nữa theo x ta được: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy$

Đạo hàm theo x rồi theo y ta được: $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 3x^2 + 2$.

Và $\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + 2x + 3y^2$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3x^2 + 2$.

Ví dụ 2 : Cho $z = f(x,y) = x^2 + 3xy$

$z'_x = 2x + 3y$; $z'_y = 3x$; $z''_{xy} = 3$

$z''_{xx} = 2$; $z''_{yy} = 0$; $z''_{yx} = 3$.

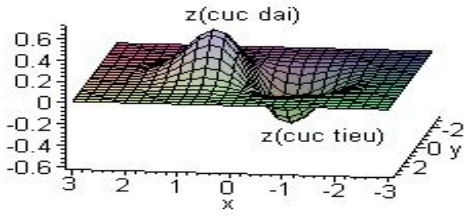
2. Cực trị :

Định nghĩa:

Ta nói hàm z = f(x,y) có cực đại (địa phương) tại điểm (a, b) nếu $f(a,b) \geq f(x,y)$ với mọi (x,y) nằm trong một lân cận nào đó của (a,b).

(Phát biểu tương tự với cực tiểu địa phương).

*** *Sau đây nói cực trị ta hiểu là cực trị địa phương.*



Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Đồ thị của hàm số có cực trị. H.1. $z = xe^{-x^2-y^2}$

3. Quy tắc " d" : *Các bước để tìm cực trị của z = f(x,y):*

1- Tính z'_x , z'_y, z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy}

2- Tìm nghiệm (x_0, y_0) của hệ 2 phương trình $z'_x = 0$ và $z'_y = 0$. $P(x_0,y_0)$ gọi là điểm dừng .

3- Lập biệt thức $d(P) = z''_{xx}(P).z''_{yy}(P) - \left[z''_{xy}(P)\right]^2$

4- Nếu a/ d(P) > 0 và $z''_{xx}(P) < 0$ (cả $z''_{xx}(P)\ va\ z''_{yy}(P)$ đều âm) thì $f(x_0,y_0)$ là cực đại.

b/ d(P) > 0 và $z''_{xx}(P) > 0$ (cả $z''_{xx}(P)\ va\ z''_{yy}(P)$ đều dương) thì $f(x_0,y_0)$ là cực tiểu.

c/ Nếu d(P)< 0 thì $f(x_0,y_0)$ không phải là cực trị.

d/ Nếu d(P) = 0 thì chưa thể kết luận về cực trị.

Ví dụ 3: Tìm cực trị hàm số $z = x^2 + xy + y^2 - 3x$.

Giải:

$z'_x = 2x + y - 3$; $z'_y = x + 2y$

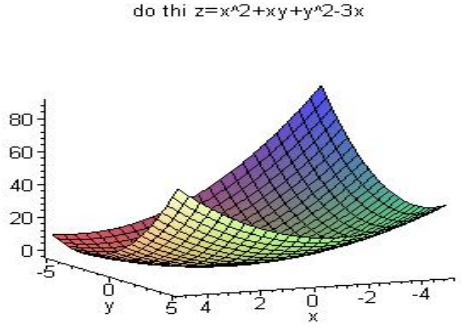
$z''_{xx} = 2$; $z''_{yy} = 2$; $z''_{xy} = 1$.

Có hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2\ ;\ y = -1$

Hàm có điểm M(2;-1) là điểm dừng.

$d(M) = 2.2 - 1^2 = 3 > 0$, $z''_{xx}(M) = 2 > 0$.

Vậy z có cực tiểu là $z_{CT} = f(2;-1) = 2^2 - 1.1 + 1^2 - 3.2 = -3$.(H.2)



H.2 Cực tiểu

Ví dụ 4: Một cơ sở sản xuất 2 loại bánh ngọt bán với giá 2$/hộp và 3$/hộp. Hàm chi phí sản xuất là : $C(x,y) = 2x^2 - 2xy + y^2 - 10x + 7y + 7$ (ngàn $), với x là sản lượng loại thứ nhất (ngàn hộp) , y là sản lượng loại thứ hai (ngàn hộp). Cơ sở nên sản xuất mỗi loại bao nhiêu để có lợi nhuận tối đa ?

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Giải:

Hàm doanh thu là $R(x,y) = 2x + 3y$ (ngàn \$).

Hàm lợi nhuận $P = R - C = 2x + 3y - (2x^2 - 2xy + y^2 - 10x + 7y + 7)$

$= - 2x^2 + 2xy - y^2 + 12x - 4y - 7.$

$P'_x = - 4x + 2y + 12$; $P'_y = 2x - 2y - 4$

$P''_{xx} = -4$; $P''_{yy} = -2$; $P''_{xy} = 2$

Có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -4x + 2y + 12 = 0 \\ 2x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 4 \text{ và } y = 2$$ điểm dừng M(4;2)

$d(M) = (-4).(-2) - 2^2 > 0$. $P''_{xx}(M) = -4 < 0$. Vậy P (4,2) là cực đại .

Kết luận : Cơ sở nên sản xuất 4.000 hộp loại 2\$ và 2.000 hộp loại 3\$.

4. Vi phân toàn phần

Vi phân toàn phần của $z = f(x,y)$ được tính theo công thức : $\mathbf{dz = f'_x\, dx + f'_y\, dy}$

Ví dụ 5: *T*ương quan giữa dz và Δz

Cho $z = x^2 - y^2$. Tại x = 1, y = 2 tính dz và Δz với $\Delta x = 0{,}01$ và $\Delta y = - 0{,}03$.

Giải:

* $\Delta z = f(x+\Delta x ; y + \Delta y) - f(x,y)$

Thế các số vào, ta có :

$\Delta z = f(1{,}01;1{,}97) - f(1;2) = 1{,}01^2 - 1{,}97^2 - (1^2 - 2^2) = 0{,}1392$

* $dz = 2xdx - 2ydy = 2x\Delta x - 2y\Delta y = 2.(0{,}01) - 4.(-0{,}03) = 0{,}14$

Ta thấy $dz \approx \Delta z$ ***khi Δx và Δy nhỏ.***

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Bài tập

3.1 Tìm $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$:

a) $z = 2x - 3y + 5$ b) $z = 5\sqrt{x} - 6y^2$

d) $z = 3x^2 - xy + y$ e) $z = x^5y^4 + x^3y^2$ f) $z = x + e^y$.

3.2 Tìm cực trị địa phương :

a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - y$

b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

c) $f(x,y) = 4x^2 - y^2$

d) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$

e) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - x + 2y$

g) $f(x,y) = e^x \sin y$.

3.3 *" Hàm $z = (x - 5)^2 + (y+4)^2 + 20$ đạt giá trị cực tiểu là 20 khi cả hai bình phương đều bằng không tức là khi $x = 5$ và $y = -4$ "*. Hãy kiểm chứng phát biểu trên bằng cách dùng quy tắc xét cực trị.

3.4 *" Hàm số $z = 10 - e^{x^2+y^2}$ đạt giá trị cực đại là 9 khi $e^{x^2+y^2} = e^0 = 1$ tức là khi $x = 0$ và $y = 0$ "* . Hãy kiểm chứng phát biểu trên bằng quy tắc tính cực trị.

3.5 Một xưởng sản xuất bóng đá và bóng chuyền với giá bán bóng chuyền 18 $/quả; bóng đá 25$/quả. Có hàm chi phí sản xuất là $C(x,y) = 4x^2 - 6xy + 3y^2 + 20x + 19y + 2$(ngàn $).

Với x là ngàn quả bóng chuyền , y là ngàn quả bóng đá. Với mỗi loại sản lượng là bao nhiêu thì nhà máy có lợi nhuận tối đa ?

3.6 Nhà máy AZ-Budapest chuyên sản xuất 2 loại máy phát điện cho quân đội.

Loại G chạy xăng và loại D chạy dầu có các hàm cầu là :

$x = 78 - 6p_1 + 3p_2$; $y = 66 + 3p_1 - 6p_2$

(x, y, p_1, p_2 là số lượng và giá tương ứng của mỗi loại).

Hãy định giá p_1, p_2 để có doanh thu tối đa .

3.7 Cho $z = x^2 + y^2$

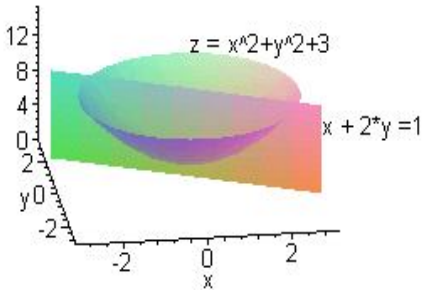
a) $x = 5$, $y = 12$, $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta y = 0{,}01$. Tính dz và Δz.

b) Tính dz và Δz trong trường hợp $x = 4$, $y = 4$, $\Delta x = 0{,}01$; $\Delta y = -0{,}01$.

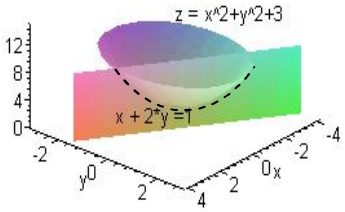
Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

§4. CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN

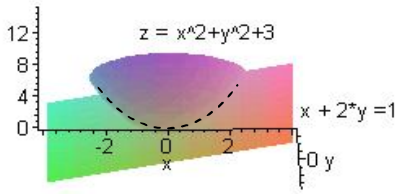
Ví dụ 1: Xét hàm số $z = x^2+y^2+3$, thấy ngay có $z_{min} = z(0,0) = 3$.
Bây giờ ta tìm cực trị của z thỏa ***điều kiện x+2y=1*** tức là cực trị này phải nằm trên mặt phẳng x+2y=1 (mặt phẳng này // với trục Oz) và nằm trên giao tuyến G. (H.1, H.2 và H.3).



H.1



H.2



H.3. $z = x^2+y^2+3$ và x+2y=1

Ta có hai cách làm:

Cách 1:

Từ x + 2y = 1 có $y = \frac{1-x}{2}$ thế vào hàm z có

$z = x^2 + (\frac{1-x}{2})^2 + 3 = \frac{5}{4}x^2 - \frac{x}{2} + \frac{13}{4}$ đây là hàm một biến .

Dễ dàng tìm được $z_{min} = z(\frac{1}{5}) = \frac{16}{5}$ ($x = \frac{1}{5}$ thì $y = \frac{2}{5}$) .

Ta kết luận : Hàm $z = x^2+y^2+3$ có cực tiểu $z_{min} = f(\frac{1}{5};\frac{2}{5}) = \frac{16}{5}$ thoả điều kiện x+2y=1 .

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Việc đưa hàm z trở thành hàm một biến đôi khi có khó khăn nên ta tham khảo thêm phương pháp sau :

2. Phương pháp nhân tử Lagrange .

Tìm cực trị của $z = f(x,y)$ với điều kiện $h(x,y) = 0$.

1- Lập hàm $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\, h(x,y)$. λ có tên là nhân tử Lagrange.

2- Giải hệ 3 phương trình $L'_x = 0$; $L'_y = 0$; $h(x,y) = 0$.
Giả sử có nghiệm là $(x_0; y_0; \lambda_0)$.

3- Nếu $f(x,y)$ có cực trị (có điều kiện) thì cực trị đó chính là $f(x_0,y_0)$.

(lưu ý : Phương pháp này chỉ giúp ta tìm điểm dừng của hàm số mà không cho ta biết đó có phải là cực trị hay không).

Trở lại với ví dụ 1 : Tìm cực trị hàm số $z = f(x,y) = x^2+y^2+3$ thỏa ***điều kiện x+2y=1.***

- Có $h(x,y) = x+2y-1 = 0$.
- Lập hàm $L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + 3 - \lambda(x+2y-1)$.
- Có hệ gồm 3 phương trình

. $L'_x = 2x - \lambda = 0$; $L'_y = 2y - 2\lambda = 0$; $x + 2y - 1 = 0$

Nghiệm là : $\lambda = \frac{2}{5}$; $x = \frac{1}{5}$; $y = \frac{2}{5}$.

Kết luận : Nếu hàm $z = f(x,y) = x^2+y^2+3$ có cực trị thỏa điều kiện $x+2y = 1$ thì cực trị này là $f\left(\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + 3 = \frac{16}{5}$.

Bài tập

4.1 Tìm cực trị có điều kiện

a) $z = f(x,y) = xy$, điều kiện $2x + y = 8$

b) $z = f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$, điều kiện $x + 2y = 10$

c) $z = f(x,y) = x^2 + y^2$, điều kiện $2x + y = 10$

d) $z = f(x,y) = xy$, điều kiện $x^2 + y^2 = 4$.

4.2 Công ty sản xuất một loại hàng tại hai địa điểm A và B . Tại A chi phí sản xuất là $C_A = 10 + \frac{x^2}{6}$, tại B là $C_B = 200 + \frac{y^3}{9}$ (x,y là sản lượng). Để sản xuất 10.100 sản phẩm, công ty nên phân bổ cho 2 địa điểm thế nào để có tổng chi phí sản xuất tối thiểu ?

4.3 GRU là một trường cao đẳng , đào tạo chuyên viên tin học tại 2 địa điểm A và B. Chi phí đào tạo tại A là $C_A = 0{,}015x^2 + 72x + 5200$; tại B là $C_B = 0{,}01y^2 + 70y + 9300$.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

(với x , y là số học viên). Trường được phân chỉ tiêu 500 học viên, trường nên phân bổ học viên ra hai địa điểm như thế nào để có chi phí thấp ?

4.4 a) Tìm cực trị của $z = f(x,y) = 4xy$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 8$

b) Tìm cực trị của $z = f(x,y) = xe^y$ điều kiện $x^2 + y^2 = 2$.

c) Tìm cực trị của $z = f(x,y) = x^2e^y$ điều kiện $x^2 + y^2 = 3$

d) Tìm cực trị của $z = f(x,y) = 4x^2y$ điều kiện $x^2 + y^2 = 3$

4.5 Một công ty có hàm sản lượng Cobb-Doughlas là $Q(x,y) = 50x^{2/3}y^{1/3}$. Công ty dự kiến đầu tư 600.000$ cho sản xuất , công ty nên phân bổ số tiền này cho nhân công và vốn như thế nào để có sản lượng tối đa ?

4.6 Công ty sản xuất một loại hàng tại 2 địa điểm A và B , tại A hàm chi phí là $C_A = 0,05x^2 + 15x + 5400$, tại B là $C_B = 0,03y^2 + 15y + 6100$ (x và y là sản lượng tại từng địa điểm) . Hàm cầu là : $p = 225 - 0,4 (x + y)$.
Công ty nên phân bổ sản lượng cho 2 địa điểm như thế nào để có lợi nhuận tối đa ?

Chương IV

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

§1. KHÁI NIỆM VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

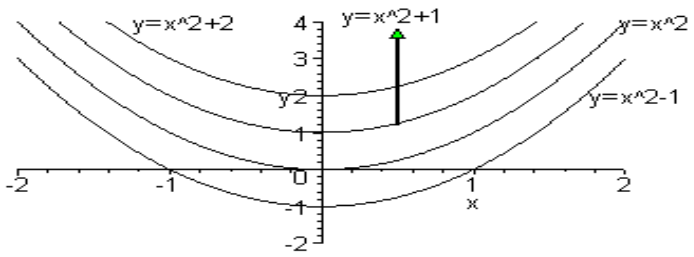
Định nghĩa : Phương trình vi phân là phương trình có chứa các đạo hàm.
Dạng F(x, y, y', y'',.....) = 0. Ta phải tìm y = f(x) .

Ví dụ 1: Tìm hàm y = f(x) thỏa y' = 2x.
Ta thấy ngay nghiệm là $y = x^2$, hay tổng quát hơn $y = x^2 + C$. Có thể tính toán chi tiết như sau :

$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dy = 2xdx$. Tích phân 2 vế : $\int dy = \int 2xdx \Rightarrow y = x^2 + C$

hoặc từ y' = 2x tích phân 2 vế $\int y'dx = \int 2xdx$, ở vế trái tích phân và đạo hàm triệt tiêu lẫn nhau, có $y = x^2 + C$.
Nghiệm này còn gọi là ***nghiệm tổng quát*** (dạng y = f (x,C)).
$y = x^2 + 1$ là ***một nghiệm riêng*** (C = 1) thỏa mãn điều kiện x = 0 , y = 1 (H.1)

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)



H.1 Các đường cong $y = x^2+C$ là nghiệm của phương trình $y' = 2x$.

Ví dụ 2: Cho phương trình vi phân $y' = e^x + 5x + 3$ (*)

a) Tìm nghiệm tổng quát .

b) Tìm nghiệm riêng thỏa mãn ***điều kiện ban đầu*** x = 0, y = 4 (y(0) = 4).

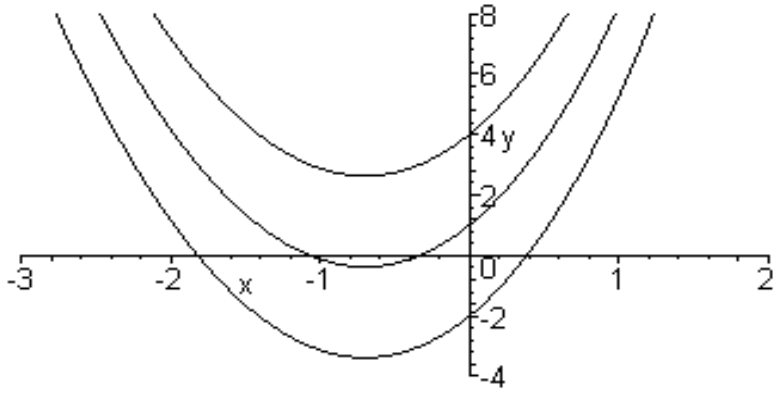
Giải:

a) Tích phân 2 vế : $\int y'\,dx = \int (e^x + 5x + 3)dx \Leftrightarrow y = e^x + 5\frac{x^2}{2} + 3x + C$ (**)

Đây là nghiệm tổng quát của pt (*).

b) Thế x = 0 , y = 4 vào (**) ta có :

$4 = e^0 + 5\frac{0^2}{2} + 3.0 + C \Rightarrow C = 3$. Vậy nghiệm riêng là $y = e^x + 5\frac{x^2}{2} + 3x + 3$.



H.2 Các đường cong $y = e^x + \frac{5}{2}x^2 + 3x + C$ là nghiệm của phương trình $y' = e^x+5x+3$

Ví dụ 3 : $y = e^{4x}$ có phải là một nghiệm của phương trình $y'' + y' - 20y = 0$?

Giải:

$y = e^{4x}$ thì $y' = 4.e^{4x}$; $y'' = 4.4.e^{4x} = 16\,e^{4x}$,

Do đó : $y'' + y' - 20y = 16.e^{4x} + 4.e^{4x} - 20\,e^{4x} = 20\,e^{4x} - 20\,e^{4x} = 0$.

Vậy $y = e^{4x}$ đúng là nghiệm.

****

Bài tập

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

1.1 Tìm nghiệm tổng quát của :

a) $y' = 4x^3$ b) $y' = e^{2x} + x$ c) $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x} - x^2 + x^5$

1.2 Tìm nghiệm riêng :

a) $y' = x^2 + 2x - 3$; $y(0) = 4$ b) $y' = 3x^2 - x + 5$; $y(0) = 6$

c) $y' = x^{2/3} - x$; $y(1) = -6$ d) $\frac{dy}{dx} = 2x + 1$; $y(0) = 3$

e) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}$; $y(4) = 0$ g) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$; $y(2) = -1$

§2. PHƯƠNG TRÌNH CÓ BIẾN PHÂN LY

Định nghĩa :

Là loại phương trình có thể chuyển về dạng : $g(x)dx = h(y)dy$.

Ví dụ 1: Giải phương trình : $\frac{dy}{dx} = 2xy$ (1)

Giải :

Ta thấy $y = 0$ là một nghiệm của pt (1)

Suy ra : $\frac{dy}{y} = 2xdx$ $(y \neq 0) \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 2xdx \Leftrightarrow \ln|y| = x^2 + C \Leftrightarrow |y| = e^{x^2+C} = e^{x^2}e^C$

Đặt $C_1 = \pm e^C$ có nghiệm tổng quát $y = C_1.e^{x^2}$.

Ví dụ 2: Giải phương trình $3y^2 \frac{dy}{dx} + x = 0$ (2) với điều kiện $y(0) = 5$.

Giải:

Từ (2) $\Rightarrow 3y^2 \frac{dy}{dx} = -x \Leftrightarrow 3y^2dy = -xdx$

$$\Leftrightarrow \int 3y^2dy = \int -xdx \Leftrightarrow y^3 = -\frac{x^2}{2} + C \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{C - \frac{x^2}{2}}$$

Là nghiệm tổng quát của pt (2).

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Thế x = 0 , y = 5 vào ta được : $5 = \sqrt[3]{C - \frac{0^2}{2}} \Leftrightarrow 125 = C$.

Vậy có nghiệm riêng : $y = \sqrt[3]{125 - \frac{x^2}{2}}$

Ví dụ 3 : Một người gởi vào ngân hàng số tiền A, lãi suất *r* (%/ năm) dồn lãi liên tục , sau t năm số tiền người đó nhận được là V(t) thỏa phương trình $\frac{dV}{dt} - rV = 0 \,(3)$. Tìm V(t) ?

Giải:

Từ (3) $\Rightarrow \frac{dV}{dt} = rV \Leftrightarrow \frac{dV}{V} = rdt \Leftrightarrow \int \frac{dV}{V} = \int rdt \Leftrightarrow \ln V = rt + C$ (V > 0).

$\Leftrightarrow V = e^{rt+C}$ (*) (V(0) = A tức là t = 0 thì V = A)

Ta có $A = e^{r0+C} = e^C \Leftrightarrow C = \ln A$,

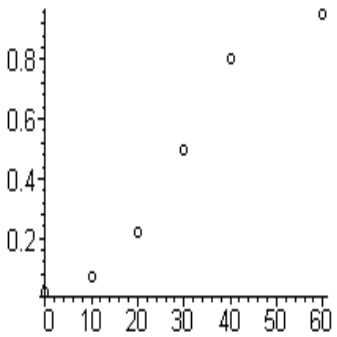
Thế vào (*) ta được: $V = e^{r.t+\ln A} = e^{r.t}.e^{\ln A} = A.e^{rt}$.

Vậy V(t) = A. e^{rt} .

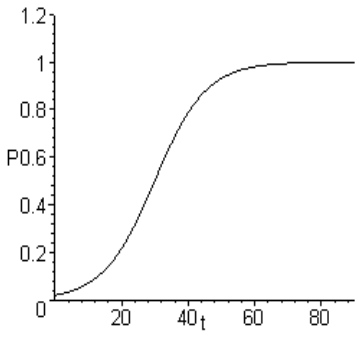
Ví dụ 4 : Một công ty phân phối bóng Tennis nhãn hiệu S. Thu thập số liệu thấy rằng tỷ lệ P người mua bóng của công ty phụ thuộc vào số lần t quảng cáo trên ti-vi (trong một tuần). Dựa theo bảng sau :

t	0	10	20	30	40	60 (lần)
P	0,02	0,07	0,22	0,50	0,79	0,95

Đồ thị ở H.2 có hình dạng giống đồ thị của hàm tăng trưởng logic (H.3) nên có thể giả thuyết rằng $\frac{dP}{dt} = kP(1-P)$. Tìm hàm P(t) , (0<P<1).



H.2



H.3

Giải:

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

$$\frac{dP}{dt} = kP(1-P) \Leftrightarrow \frac{dP}{P(1-P)} = kdt \quad \Leftrightarrow \int \frac{dp}{P(1-P)} = \int kdt$$

$$\Leftrightarrow \int (\frac{1}{P} - \frac{1}{1-P})dP = kt + C \quad \Leftrightarrow \quad \ln P - \ln(1-P) = kt + C$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{P}{1-P} = kt + C \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P}{1-P} = e^{kt+C} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-P}{P} = e^{-(kt+C)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{P} - 1 = e^{-(kt+C)} \Leftrightarrow \quad P = \frac{1}{1+e^{-(kt+C)}} \quad (1) \quad \Leftrightarrow P = \frac{1}{1+e^{-kt}e^{-C}} \quad (2)$$

Theo giả thuyết P(0) = 0,02 nên $0{,}02 = \frac{1}{1+e^{-C}}$

$\Rightarrow$ $e^{-C} = 49$ thế vào (2) ta có $P = \frac{1}{1+49e^{-kt}}$

Mà P (10) = 0,07 nên $0{,}07 = \frac{1}{1+49e^{-10k}}$

$$\Leftrightarrow 1 + 49e^{-10k} = 14{,}23 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-10k} = 0{,}27 \quad \Leftrightarrow \quad -10k = \ln 0{,}27 \quad \Leftrightarrow k = 0{,}13$$

Kết qủa cuối cùng là $P(t) = \frac{1}{1+49e^{-0,13t}}$.

§3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP MỘT

Là pt có dạng y' + p(x)y = q(x)

Ví dụ 1: Tìm nghiệm tổng quát của $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

Giải:

Lập thừa số tích phân dạng : $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$,

Ta có : $\mu(x) = e^{\int 2xdx} = e^{x^2,}$.

Nhân e^{x^2} vào 2 vế phương trình :

$$e^{x^2}y' + e^{x^2}2xy = e^{x^2}x.e^{-x^2} \Leftrightarrow e^{x^2}y' + e^{x^2}2xy = x.$$

Để ý rằng :

$\left(e^{x^2}y\right)' = 2xe^{x^2}y + y'e^{x^2}$ có $\left(e^{x^2}y\right)' = x$

Nên lấy tích phân 2 vế ta được: $\int \left(e^{x^2}y\right)' dx = \int xdx \Leftrightarrow e^{x^2}y = \frac{x^2}{2} + C$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{e^{x^2}}\left(\frac{x^2}{2} + C\right).$$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Tóm tắt cách giải như sau :

1- Lập thừa số tích phân $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$
2- Nhân $\mu(x)$ vào 2 vế của phương trình
3- Viết vế trái phương trình thành dạng $[\mu(x).y]'$.
4- Tích phân 2 vế rồi rút được y.

Ví dụ 2: Giải phương trình $xy' + 2y = 5x^3$ (1) .

Giải:

Từ pt (1) ta có: $y' + \frac{2}{x}y = 5x^2$ (*) ($x \neq 0$)

Ta có: $\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$, nhân x^2 vào 2 vế của (*) ta được:

$$x^2y + x^2\frac{2}{x}y = 5x^2x^2 \Leftrightarrow (x^2y)' = 5x^4 \Leftrightarrow \int\left(x^2y\right)' dx = \int 5x^4dx$$

$$\Leftrightarrow x^2y = x^5 + C \Leftrightarrow y = x^3 + \frac{C}{x^2}.$$

Bài tập

3.1 Giải các phương trình có biến phân ly sau :

a) $\frac{dy}{dx} = 4x^3y$ b) $3y^2\frac{dy}{dt} = 5t$ c) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}$

d) $\frac{dR}{dt} = \frac{3}{R}$ e) $y' = 3x + xy;\quad y(0) = 5$ f) $y' = 5y^{-2};\quad y(2) = 3$

3.2 Giải các phương trình tuyến tính cấp một :

a) $y' - 2xy = 2x$ b) $y' + 2y = e^{2x}$ c) $xy' - 3y = x^5$

d) $xy' + y + x = e^x$ e) $xy' + (2+3x)y = xe^{-3x}$

f) $x^2y' + xy = x^4,\ y(2) = 5$ g) $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = x$.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

§ 4 . PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

1. Phương trình vi phân cấp hai dạng đơn giản

Ví dụ 1: a) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình y'' = e^x + 1 (1)
b) Tìm nghiệm riêng thỏa y'(0) = 1 , y(0) = 4.

Giải :

a) Tích phân hai vế của (1) ta có : $\int y''dx = \int (e^x + 1)dx \Leftrightarrow y' = e^x + x + C_1$.

Tích phân lần nữa : $\int y'dx = \int \left(e^x + x + C_1\right)dx \Leftrightarrow y = e^x + \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$,

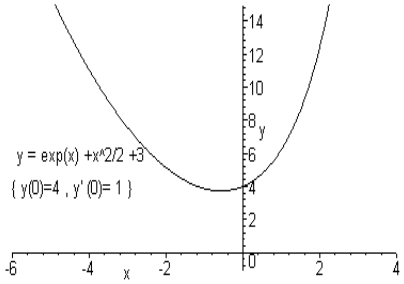
Dây là nghiệm tổng quát của phương trình (1).

b) Từ $\begin{cases} y' = e^x + x + C_1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ có $1 = e^0 + 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$ $(e^0 = 1)$

Từ $\begin{cases} y = e^x + \frac{x^2}{2} + C_2 \\ y(0) = 4 \end{cases}$ có $4 = e^0 + \frac{0^2}{2} + C_2 \Rightarrow C_2 = 3$

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Vậy nghiệm riêng là y = $e^x + \frac{x^2}{2} + 3$ (H.1)



H.1.Nghiệm riêng của pt $y'' = e^x+1$

2. Phương trình tuyến tính thuần nhất hệ số hằng:

Là pt có dạng y''+ ay' + by = 0 (*) , a, b là hằng số .

Ví dụ 2: Giải phương trình y'' - 5y' + 6y = 0 (2).

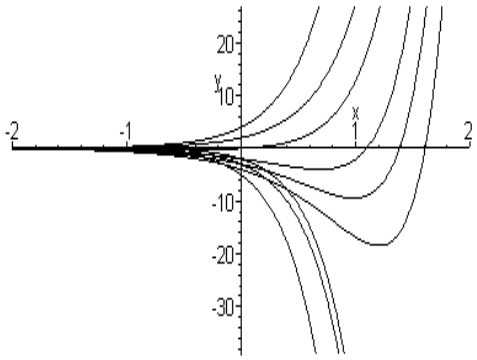
Giải:

Thấy ngay y = 0 là một nghiệm .
Ta thử với $y = e^{kx}$. Có $y' = k e^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$ thế vào (2) :
$k^2 e^{kx} - 5k e^{kx} + 6k^2 e^{kx} = e^{kx}(k^2 - 5k + 6) = 0$
Ta thấy phương trình thỏa mãn với k = 2 và k =3.
Vậy $y_1 = e^{2x}$ và $y_2 = e^{3x}$ là nghiệm của (2).

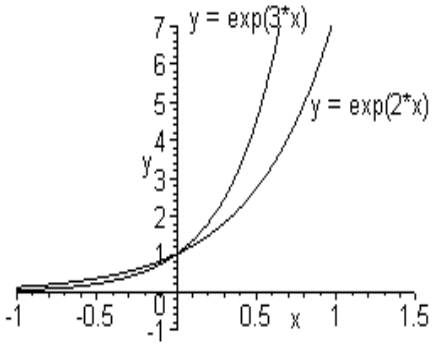
Bây giờ ta thử xem $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ có phải là nghiệm tổng quát của (2). Ta có :

$y' = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x}$; $y'' = 4C_1 e^{2x} + 9C_2 e^{3x}$

Thế vào (2) :
$4C_1 e^{2x} + 9C_2 e^{3x} - 5 (2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x}) + 6(C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}) =$
$=10C_1 e^{2x} -10C_1 e^{2x} + 15C_2 e^{3x} - 15C_2 e^{3x} = 0$
Vậy : $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ là nghiệm tổng quát của (2). (H.3)



H.3 Họ nghiệm của pt thuần nhất



H.4. 2 nghiệm riêng $y = e^{2x}$; $y = e^{3x}$

**** Ta dựa vào định lý sau để tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất:*

y'' + ay' + by = 0 (*) .

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Định lý :

- Nếu k_1 và k_2 là 2 nghiệm của *phương trình đặc trưng* $k^2 + ak + b = 0$ thì nghiệm tổng quát của (*) là $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$.
- Nếu phương trình đặc trưng có nghiệm kép k_0 ($\Delta = 0$)

Thì nghiệm tổng quát của pt (*) là : $y = C_1xe^{k_0x} + C_2e^{k_0x}$.

(Ta không xét trường hợp $\Delta < 0$).

Ví dụ 3 : Giải phương trình $y'' - 2y' + y = 0$ (3)

Giải:

Phương trình đặc trưng $k^2 - 2k + 1 = 0$ có nghiệm kép $k_0 = 1$

Vậy nghiệm tổng quát của (3) là $y = C_1xe^x + C_2e^x$.

3. Phương trình không thuần nhất:

Là pt dạng : $y'' + ay' + by = d$, a, b, d : hằng số .

Ví dụ 4: Giải $y'' - 5y' + 6y = -18$ (**)

Ta thấy rằng $y = -\frac{18}{6} = -3$ là một nghiệm riêng của (**).

Sử dụng kết quả trong ví dụ 2, bằng phép thử có thể thấy ngay rằng :

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - 3$ là nghiệm tổng quát của (**).

Tóm tắt : Nghiệm tổng quát của của phương trình không thuần nhất **$y'' + ay' + by = d$** là $y = y_t + \frac{d}{b}$.

Trong đó y_t là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y'' + ay' + by = 0$.

Ví dụ 5: Cho $y'' - 2y' + y = 7$.

Yêu cầu: a/ Tìm nghiệm tổng quát .

b/ Tìm nghiệm riêng thoả $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$.

Giải :

a/ Dùng kết quả ở *ví dụ 3* ta có ngay nghiệm tổng quát là $y = C_1xe^x + C_2e^x + 7$.(*)

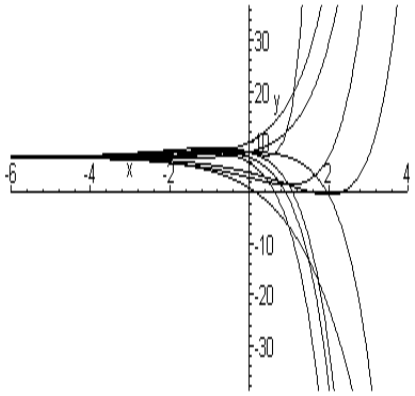
b/ Cho $x = 0$ có $3 = C_1.0.e^0 + C_2.e^0 + 7$ => $C_2 = -4$.

Từ (*) có $y' = C_1e^x + C_1xe^x + C_2e^x$.

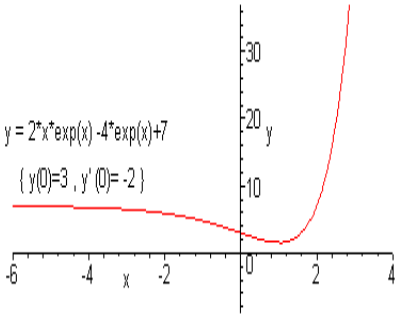
Cho $x = 0$ và $C_2 = -4$ ta có : $-2 = C_1e^0 + C_1.0.e^0 - 4.e^0$ => $C_1 = 2$.

Vậy nghiệm riêng là $y = 2xe^x - 4e^x + 7$.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)



H.1 Các đường cong $y= C_1xe^x+C_2e^x+7$



H.2 Đường cong $y= 2xe^x -4e^x+ 7$ (thoả y'(0)= -2 và y(0)=3) .

Bài tập

4.1 Giải các phương trình vi phân :

a) y''+ 4y' + 4y = 0 b) y''- 7y' + 10y = 5

c) y''- 5y' + 6y = 6 ; y'(0) = 4 , y(0) = 7

d) y''- y' - 2y = 8 ; y'(0) = 1 , y(0) = 4

e) y''+ 10y' + 25y = 0 .

4.2 Giải các phương trình vi phân (tìm nghiệm tổng quát ,nghiệm riêng):

a) $y'' = x^2 + 1$.

b) $y'' + e^x = 3$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 5$.

c) $y'' + x + x^2 = 0$; $y(0) = -4$; $y'(0) = 1$

d) $x'' = y^2 + 4$; $x(1) = 3$; $x'(1) = 4$.

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)

Create PDF files without this message by purchasing novaPDF printer (http://www.novapdf.com)