PHẦN 1

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

§1. Ma trận.
§2. Ma trận nghịch đảo.
§3. Định thức.
§4. Vectơ - Hệ vectơ.
§5. Hạng của ma trận.
§6. Hệ phương trình tuyến tính.
§7. Phương pháp Gauss.
§8. Mô hình Input - Output của Leontief.

§ 1. MA TRẬN

1. Khai niem về ma trận

Định nghĩa 1:

Ma trận cấp m* x *n là một tập hợp gồm m x n con số được viết thành bảng chữ nhật gồm *m* dòng, *n* cột như sau:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

đường chéo chính

a_{ij} là phần tử nằm ở dòng i cột j. Ta có thể viết ngắn gọn là: $A=(a_{ij})$ với a_{ij} là phần tử ở vị trí (i,j) của A.

Ví dụ 1: **a)** $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 7 & 9 & -5 \end{pmatrix}$ là ma trận cấp 2x3 và có các phần tử là:

$a_{11}=2$; $a_{12}=0$; $a_{13}=1$; $a_{21}=7$; $a_{22}=9$; $a_{23}=-5$.

b) $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 2 \\ 3 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ là ma trận cấp 2x2 và có các phần tử :
$b_{11} = \frac{1}{5}$; $b_{12} = 2$; $b_{21} = 3$; $b_{22} = \sqrt{2}$;

c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ là ma trận cấp 1 x 3 và có các phần tử : $c_{11} = 0$; $c_{12} = 1$; $c_{13} = 0$;

- ***Các loại ma trận :***

  - *Ma trận vuông cấp n* : là ma trận có số hàng bằng số cột.
  - *Ma trận không* : ký hiệu O nếu tất cả các phần tử đều là số 0.
  - *Ma trận đơn vị* : Ký hiệu I_n là một ma trân vuông cấp n mà tất cả các phần tử nằm trên đường chéo đều bằng 1 , các phần tử khác đều bằng 0.
    ($a_{ij} = 1$ nếu i=j và $a_{ij} = 0$, $i \neq j$, $\forall i, j$).
  - *Ma trận đường chéo :* Là ma trận mà tất cả các phần tử bên ngoài đường chéo đều bằng 0.
  - *Ma trận tam giác trên :* Là ma trận mà mọi phần tử ở bên dưới đường chéo đều bằng 0.
  - *Ma trận tam giác dưới :* Là ma trận mà mọi phần tử ở bên trên đường chéo đều bằng 0.

Ma trận tam giác trên hay ma trận tam giác dưới gọi chung là ma trận tam giác.

Ví dụ 2 :

a) A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ là ma trận tam giác dưới, và là ma trận vuông cấp 3.

b) B = $\begin{pmatrix} -1 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ là ma trận tam giác trên.

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ là ma trận đường chéo.

d) $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ là ma trận đơn vị.

Định nghĩa 2:

Ma trận chuyển vị của ma trận A ký hiệu là A^T : là ma trận nhận được bằng cách lấy cột 1 của ma trận A viết thành hàng 1 của ma trận A^T, cột 2 của ma trận A viết thành hàng 2 của ma trận A^T , ...

Ví dụ: 3 Cho $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 7 & 9 & -5 \end{pmatrix}$ thì $A^T=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 9 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$,

$$B=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 2 \\ 3 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow B^T=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 3 \\ 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Ta thấy $\left(a_{ij}^T\right)=\left(a_{ji}\right)$ và $\left(A^T\right)^T=A$.

2. Cac phep toan vôi ma tran

Định nghĩa 1: Cho hai ma trận A, B cùng cấp. Ta nói A = B nếu

$$\boxed{a_{ij}=b_{ij}\ ,\forall i,j}$$

Định nghĩa 2:

Cho hai ma trận A, B cùng cấp. Tổng hai ma trận A và B (ký hiệu là A + B)

$$\boxed{A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right),\forall i,j}$$

* Tổng A + (- B) được ký hiệu bởi A – B và gọi là hiệu của ma trận A và B.

Vê duï1 Với $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ và $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ thì

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 2:

Công ty M có 2 kho I và II. Lượng hàng tồn kho đầu kỳ là :

Kho I : 15 tấn gạo, 80 tấn dầu ăn, 30 tấn đường.

Kho II : 11 tấn gạo, 21 tấn dầu ăn và 31 tấn đường.

Từ đây có ma trận hàng tồn kho $M_0=\begin{pmatrix} 15 & 80 & 30 \\ 11 & 21 & 31 \end{pmatrix}$.

Nếu có ma trận hàng xuất trong kỳ là A và nhập trong kỳ là B, thì hàng tồn cuối kỳ có ma trận là $M_1 = M_0 + B - A$.

Định nghĩa 3:

Cho ma trận A tùy ý và một số thực α. Ta gọi tích của α với A (ký hiệu là α A) là ma trận :

$$\boxed{B = \alpha A \Leftrightarrow b_{ij} = (\alpha a_{ij})\ , \forall i, j}$$

Ví dụ 3

Với $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\alpha = 2$ thì

$$\alpha A = 2 . \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ -4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Định nghĩa 4:

Cho hai ma trận A, B . Tích của ma trận A và B (ký hiệu là AB) là ma trận được xác định bởi :

$$\boxed{AB = (ab)_{ij} = (a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}.b_{nj})\ , \forall i, j}$$

Ví dụ 4 Với $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ để có ma trận AB ta thực hiện như sau

		6	5
		2	0
1	7	6.1 + 2.7	5.1 + 0.7
3	4	6.3 +2.4	5.3 + 0.4

Vay $AB = \begin{pmatrix} 20 & 5 \\ 26 & 15 \end{pmatrix}$

* **Chú ý:**

i) Tích hai ma trận chỉ thực hiện được khi số cột của ma trận thứ nhất bằng số dòng của ma trận thứ hai.

ii) Muốn có phần tử ở vị trí thứ *(i, j)* của ma trận tích ta lấy hàng i của A nhân với cột j của B rồi cộng lại.

iii) $AB \neq BA$.

Ví dụ 5 Với $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 8 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

	7	0	-2
	8	-1	6

1	2	7.1+8.2	0.1+(-1).2	-2.1+ 6.2
5	3	7.5 + 8.3	0.5+(-1).3	-2.5+6.3

Vậy $$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}7 & 0 & -2\\ 8 & -1 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23 & -2 & 10\\ 59 & -3 & 8\end{pmatrix}$$

Ứng dụng :

Một shop bán 3 lọai hàng : Chemise, quần tây, và jacket. Trong 2 ngày 10/5 và 11/5 lượng hàng bán ra cho trong bảng sau :

Ngày bán	Chemise	Quần tây	Jacket
10/5	8	6	5
11/5	7	4	9

Giá vốn và lãi của từng lọai là : Chemise 7$ và 1$ / chiếc.
Quần tây 12$ và 2$ / chiếc
Jacket 18$ và 3$ / chiếc

Thực hiện nhân 2 ma trận :

$$\begin{pmatrix}8 & 6 & 5\\ 7 & 4 & 9\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}7 & 1\\ 12 & 2\\ 18 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}218 & 35\\ 259 & 42\end{pmatrix}$$

Doanh thu và lãi ngày 10/5.

Doanh thu và lãi ngày 11/5

Ma trận tích cho ta biết tổng doanh thu (theo giá vốn) và tổng số lãi của từng ngày.

3. Một số tính chất của phép cộng và nhân của ma trận:

Cho ma trận A, B, C và số thực α,β. Khi đó

$i)\ \ A+B=B+A$

$ii)\ \ (A+B)+C=A+(B+C)$

$iii)\ \ 0+A=A+0=A$

$iv)\ \ A+(-A)=(-A)+A=0$

$v)\ \ (A+B)^T=A^T+B^T$

$vi)\ \ \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

$vii)\ \ (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

$viii)\ AI_n=I_nA=A$

Ví dụ 6:

$$AI_3=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 5 & 7 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 5 & 7 & -4\end{pmatrix};\ I_2B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4 & 5\\ 0 & 3 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 5\\ 0 & 3 & 8\end{pmatrix}$$

Bài tập

1.1 Cho A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; C = $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ và $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tìm

a) $X = 3B + C$ *b)* $Y = B^T - C$ *c)* $Z = 3C - B$

d) BC ; CB ; *và* BA . *e)* $B.I_2$; $I_2.C$; $I_2.A$; $A^T.B$; $A^T.C$; $A.A^T$.

f) Tìm x, y , z thỏa mãn : $4\begin{pmatrix} x & y \\ z & -1 \end{pmatrix} = B - \begin{pmatrix} -y & -7 \\ -11 & 7x \end{pmatrix}$

g) Tìm x, y, z , t thỏa mãn : $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = C$

h) Tìm ma trận M, H thỏa mãn : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.M = C$. , $H.C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$

1.2 Cho A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; C = $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Thực hiện phép nhân AC ; BC để thấy rằng A ≠ B nhưng AC = BC.

§ 2. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

Ma trận đơn vị có tính chất sau : A.I=A và I.A=A

1. Định nghĩa :

Cho A là một ma trận vuông cấp nxn , ma trận nghịch đảo của A được ký hiệu là A^{-1} và có tính chất sau : $A.A^{-1}= I$, $A^{-1}.A = I$ (khi đó A gọi là ma trận khả nghịch)
(Ma trận không vuông thì không có ma trận nghịch.)

Ví dụ 1: Với $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Ta có $$AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

và $$BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Vậy B là ma trận nghịch của A ; $B = A^{-1}$ (dĩ nhiên là $A = B^{-1}$)

2. Tìm ma trận nghịch đảo

Ví dụ 2 : Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, ta có thể tìm A^{-1} như sau :

Đặt $$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_3 & 3x_2 + x_4 \\ 2x_1 + x_3 & 2x_2 + x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_4 = 1 \end{cases}; \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 & x_2 = -1 \\ x_3 = -2 & x_4 = 3 \end{cases}$$

Vậy : $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Các phép biến đổi sơ cấp (PBĐSC) trên các hàng của ma trận :

Các PBSC bao gồm : - Đổi chỗ 2 hàng,
- Nhân các phần tử một hàng với số $k \neq 0$
- Cộng vào một hàng k lần một hàng khác.

Ví dụ 3 : Cho ma trận M = $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dùng các PBĐSC trên hàng để biến đổi M thành dạng $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots\ldots \\ 0 & 1 & \ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}$, ta thực hiện 2 bước :

a/ Lấy hàng 1 trừ hàng 2 viết vào vị trí h_1 : h_1 - h_2 -> h_1

b/ Lấy hàng 2 trừ 2 lần hàng 1 viết vào vị trí h_2 : h_2 - $2h_1$ -> h_2.

Được ma trận như yêu cầu:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_1 - h_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_2 - 2h_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Tìm ma trận nghịch đảo bằng các PBĐSC trên hàng

Cho A là ma trận vuông cấp nxn.

- Ta viết vào phía trái A thêm ma trận I_n kí hiệu (A| I_n).
- Áp dụng các PBĐSC trên toàn ma trận (A| I_n) để biến A trở thành I_n . Khi đó (A| I_n) trở thành (I_n |A^{-1}).

Như ở ví dụ trên ta đã biến đổi :

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

(A| I_2) $\to$ (I_2| A^{-1}).

Vaôy $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ thì $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Ví dụ 4 :

Cho $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ ta tìm B^{-1} bằng cách viết :

$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ lần lượt biến đổi 4 bước:

a/ $h_2 - 2h_1 \to h_2$; b/ $h_3 - 2h_1 \to h_3$; c/ $h_2 - h_3 \to h_2$; d/ $h_1 - 2h_2 \to h_1$

Ta nhận được ma trận : $\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$ vậy $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Bài tập

2.1 Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau :

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ e) $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

2.2 Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ $b)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ $c)\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ $d)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

§ 3 . ĐỊNH THỨC

1. Khái niệm về định thức

Cho ma trận vuông cấp 2x2 : $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ định thức của ma trận A là 30 được tính như sau : 8.4 - 2.1 = 32 - 2 = 30 , và ký hiệu det A = 30 hoặc $|A| = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 30$. Định thức này là định thức cấp 2 (có 2 hàng và 2 cột)

Ví dụ 1 : a) $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, det B = -4.3 - 2.1 = -14 ;

b) $C = (-8)$, det C = -8 định thức cấp 1 .

c) $K = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, det K = ad - cb .

- A là ma trận vuông, xóa dòng i và cột j của A ta có ma trận con M_{ij}, định thức của ma trận này gọi là ***định thức con*** **,det M_{ij} .**

Phần bù đại số của a_{ij} là C_{ij} $\boxed{C_{ij} = (-1)^{i+j} .\det M_{ij}}$

Ví dụ 2 : Với ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 8 & 5 \\ 5 & 8 & 4 & 2 \\ 6 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 5 \\ 8 & 4 & 2 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \; ; \; M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 5 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 9 \; ; \; M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 5 & 8 & 2 \\ 6 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 24 \; ; \; M_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 4 \\ 6 & 93 & 3 \end{vmatrix} = 27$$

$C_{11} = (-1)^{1+1} 6 = 6$; $C_{12} = (-1)^{1+2} 9 = -9$; $C_{13} = (-1)^{1+3} 24 = 24$; $C_{14} = (-1)^{1+4} 27 = -27$

2. Định thức

Cho A là ma trận vuông cấp nxn, định thức của ma trận A là

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}C_{1j} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + a_{14}C_{14} + \ . \ . \ . + a_{1n}C_{1n}$$

3. Định thức cấp 3

Ví dụ 3 : Cho $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ Tính det G (định thức cấp 3)

Theo định nghĩa $\det G = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1.(-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2.(-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3.(-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 0$

Với định thức cấp 3 ta có thể tính nhanh theo qui tắc :
Viết thêm cột 1, cột 2 vào bên phải định thức :

$105 \quad 48 \quad 72 \quad \leftarrow$ trừ các số này

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{matrix}$$

$45 \quad 84 \quad 96 \quad \leftarrow$ cộng các số này

Nhân theo các đường chéo (mũi tên) rồi cộng trừ theo hướng dẫn.
det G = 1.5.9 + 2.6.7 + 3.4.8 - [7.5.3 + 8.6.1 + 9.4.2] = 45 + 84 + 96 - 105 - 48 -72 = 0

4. Định lý *Laplace*

Cho A là ma trận vuông cấp nxn thì :

$$\boxed{\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + ... + a_{in}C_{in}}$$

(Ta gọi đây là định thức khai triển theo hàng i)

va

$$\boxed{\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + ... + a_{nj}C_{nj}}$$

(Định thức khai triển theo cột j)

Ví dụ 4 : Để tính det A của *ví dụ 2* , ta khai triển theo hàng 1 (vì hàng này có nhiều số 0 nên tính toán ngắn hơn) :

det A = $a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + a_{14}C_{14} =$ 0.6 + 3(-9) + 0.24 + 4(-27) = - 135.

5. Một số tính chất của định thức

1- **det A = det A^T ; det $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$; det(AB) = det A . detB .**

2-Định thức đổi dấu nếu đổi chỗ hai hàng (cột).

3-Định thức bằng không nếu có một hàng (cột) toàn số 0 .

4-Định thức có hai hàng (cột) giống nhau thì bằng 0.

5-Nếu một hàng (cột) có thừa số chung thì có thể đưa ra ngoài.

6-Định thức không đổi nếu cộng vào một hàng (cột) , *k* lần một hàng (cột) khác.

7- Nhân ma trận cấp nxn với một số k thì định thức tăng lên k^n lần :

det (kA) = k^n (detA) .

Ví dụ 5 :

a) $\begin{vmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 7 & 1 & 7 \\ 9 & 8 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 7 & 1 & 7 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 100 & 50 & 25 \\ 8 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 25.\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ vì (3 5 7) = (1 1 1) + 2. (1 2 3) .

6. Định lý về ma trận khả nghịch

Cho A là ma trận vuông cấp nxn mà *det A* ≠ 0, khi đó :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}}$$

với C_{ij} là các phần bù đại số của ma trận A.

(Nếu detA = 0 thì không có A^{-1} , ta nói A là ma trận suy biến).

Ví dụ 6 : Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$, detA = 100 , $A^{-1} = \dfrac{1}{100}\begin{pmatrix} -48 & 10 & 12 \\ 26 & -20 & 6 \\ 32 & 10 & -8 \end{pmatrix}$

*** Nếu** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ thì $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$ *đây là cách tính nhanh ma trận nghịch đảo của một ma trận cấp 2x2.*

Bài tập

3.1 Tìm ma trận nghịch đảo :

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & -12 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ d) $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3.2 Tính các định thức :

a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ $b)$ $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ $c)$ $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ $d)$ $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

$e)$ $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -8 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

3.3 Cho các ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

a) Tìm A^T .
b) Tìm $M=A.A^T$. Tính det M.
c) Tìm C^{-1}.
d) Tìm X và Y thỏa : $3A + X = B$, $C.Y=A$.

3.4 Cho các ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

a/Tìm X ,Y thỏa : $A. X = B^T$ .b/ $YA=B$

3.5 Cho các ma trận $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

a/ Tìm Z thỏa $2C - Z^T = 3E$ b/ Tìm Y thỏa $YE = C$.

3.6 Xác định s và t để các ma trận sau khả nghịch

a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & s \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & -12 \end{pmatrix}$ b) $C = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & t \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}$

§4 . *VECTƠ - HỆ VECTƠ*

1. *Định nghĩa*

Vectơ n chiều là một bộ n số thực có sắp xếp .

Ký hiệu một vectơ x = ($x_1, x_2, ..., x_n$) (gọi là vectơ *n* thành phần ,vectơ *n* chiều).

Ví dụ 1: a = (1,0,-3) là vectơ 3 chiều; b = (2 ; $\frac{1}{5}$) là vectơ 2 chiều.

Ta cũng có thể viết vectơ dưới dạng cột : $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/5 \end{pmatrix}$

Vectơ không : 0 = (0; 0; ....; 0)

Hai vectơ bằng nhau : với $a = (a_1, a_2, ..., a_n), b = (b_1, b_2, ..., b_n)$

a = b $\Leftrightarrow$ $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_n = b_n$.

2. *Các phép tính*

* ***Nhân vectơ với số thực :*** $\boxed{\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n)\ ,\ \alpha \in \Re}$

Ví dụ 2 : 3.(1; 0; -3) = (3 ; 0; -9)

* ***Cộng 2 vectơ***

Với $a = (a_1, a_2, ..., a_n), b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ thì $\boxed{a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)}$

Ví dụ 3: (3; 0; -9) + (1; 5; 2) = (4; 5; -7)

3. *Một số tính chất*

Cho a , b , c là các vectơ n chiều, λ là số thực . Ta có :

* a + b = b + a

* (a + b) + c = (a + b) + c

* $\lambda.(\ a + b\ ) = \lambda a + \lambda b$

* a + 0 = a +0 = a.

4. Tổ hợp tuyến tính

Vectơ x được gọi là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $v^1, v^2, \ldots.., v^k$ nếu :

$\boxed{x = \lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 + \ldots\ldots\ldots. + \lambda_k v^k}$ với $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ là các số thực .

Ví dụ 4 :

Cho $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$

x có phải là tổ hợp tuyến tính của v^1, v^2, v^3 ?

Giải:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = l_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + l_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} l_1 + l_2 + l_3 \\ l_2 + l_3 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ta có hệ phương trình : $\begin{cases} l_1 + l_2 + l_3 = 3 \\ l_2 + l_3 = 2 \\ l_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 = 1 \\ l_2 = 0 \\ l_3 = 2 \end{cases}$

Vậy : x = $1v^1 + 0v^2 + 2v^3$, Tính x là tổ hợp tuyến tính của v^1, v^2, v^3 .

Ví dụ 5 :

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad v^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, x có phải là tổ hợp tuyến tính của v^1, v^2 ?

Giải :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = l_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + l_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 + 2l_2 \\ l_1 + 2l_2 \end{pmatrix},$$

Ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} l_1 + 2l_2 = 1 \\ l_1 + 2l_2 = 2 \end{cases}$$

Hệ này vô nghiệm. Vậy x không phải là tổ hợp tuyến tính của v^1, v^2 .

5. Hệ vectơ độc lập tuyến tính :

Định nghĩa : Hệ gồm k vectơ $\{v^1, v^2, \ldots., v^k\}$ gọi là hệ *độc lập tuyến tính* nếu chỉ có duy nhất các số thực $l_1 = l_2 = \ldots\ldots = l_k = 0$ thỏa mãn : $l_1 v^1 + l_2 v^2 + \quad + l_k v^k = 0$

Ví dụ 6 : Cho 2 vectơ v^1 = (1;1) , v^2 = (1;2). Xét phương trnh

$$l_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+l_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad (*)$$

Ta thấy ngay $l_1 = l_2 = 0$ thỏa mãn.
Ta tìm các l_1, l_2 khác :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}l_1\\l_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}l_2\\2l_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} l_1+l_2=0\\ l_1+2l_2=0\end{cases}.$$

Hệ phương trình nay chỉ có duy nhất $l_1 = l_2 = 0$ thỏa mãn. Vậy hệ 2 vectơ $\{v^1, v^2\}$ là *hệ độc lập tuyến tính*.

Ví duï 7: Cho 3 vec tô v^1 = (1,1) , v^2 = (1,2) ; v^3 = (2,3).

Xeùt phöông trình :

$$l_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+l_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+l_3\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$ ta cuõng thaáy $l_1 = l_2 = l_3 = 0$ thoûa maõn.

Ta tìm caùc l_1, l_2, l_3 khaùc.

$$l_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+l_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+l_3\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}l_1+l_2+2l_3\\ l_1+2l_2+3l_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} l_1+l_2+2l_3=0 \Rightarrow l_1=-l_2-2l_3\\ l_1+2l_2+3l_3 \quad =0 \Rightarrow -l_2-2l_3+2l_2+3l_3=0\end{cases}$$

$\Rightarrow \ l_2+l_3=0 \ \Rightarrow \ l_2=-l_3$, choïn $l_2=1 \Rightarrow l_3=-1$, $l_1=1$

Ta thaáy $1.v^1+1.v^2-1.v^3=0$. Vaäy heä 3 vec tô $\{v^1,v^2,v^3\}$ khoâng ñoäc laäp tuyeán tính , ta goïi heä naøy laø heä phuï thuoäc tuyeán tính.

(Hệ không độc lập tuyến tính thì gọi là hệ *phụ thuộc tuyến tính*) .

6. Khoâng gian tuyeán tính R^n

Ñònh nghóa : Khoâng gian tuyeán tính R^n laø taäp hôïp taát caû caùc vec tô n chieàu cuøng vôùi hai pheùp tính noùi ôû treân.

Ví duï R^2 laø khoâng gian tuyeán tính cuûa caùc vec tô hai chieàu...

Trong R^2 xet hai vec tô $e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ he gom hai vec tô nay ñoc lap tuyen tính , moi vec tô thuoc R^2 ñeu la to hôp tuyen tính cua hai vec tô nay. Ví du $a = \begin{pmatrix} -9 \\ 15 \end{pmatrix}$ thì $a = -9e^1 + 15e^2$.

Ta noi e^1, e^2 la mot cô sô cua R^2 (con goi la cô sô ñôn vò) .
Töông tö cô sô ñôn vò cua R^3 gom cac vec tô (1;0;0) , (0;1;0) , (0;0;1).

Bai tap

4.1 a) Cho các vectơ a = (2;3) ; b = (-1;0); c = (2;2) và o = (0;0).
Các vectơ trên có phải là tổ hợp tuyến tính của 2 vectơ v^1 = (1;0) và v^2 = (1;1).

b) Cho các vectơ d = (3;1;4) ; e = (2;1;2) ; g = (3;-3;2) , các vectơ trên có phải là các tổ hợp tuyến tính của 2 vectơ u^1 = (1;1;0) và u^2 = (2;-1;1).

4.2 Xét tính độc lập tuyến tính / phụ thuộc tuyến tính của các hệ vectơ sau :

a) { v^1 = (1;0) ; v^2 = (0;1) } b) { v^1 = (1;0) ; v^2 = (0;1) ; v^3 = (3;-3)}

c) { v^1 = (1;0) ; v^2 = (0;1) ; v^4 = (0;0).}

4.3 Cho a = (1;0;0) ; b = (1;1;0) ; c = (1;1;1) ; d = (3;4;2) .
Xét tính độc lập tuyến tính / phụ thuộc tuyến tính của các hệ vectơ :

a) $\{a,b,c\}$ b) $\{a,b,c,d\}$ c) $\{a,b,d\}$.

4.4 Xét tính độc lập tuyến tính / phụ thuộc tuyến tính của các hệ vectơ :

a) $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ -5 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$

§5 . *HẠNG CỦA MA TRẬN*

1. Ma tran dang bac thang :

Xet cac ma tran sau :

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3&5\\0&3&2&4\\0&0&0&8\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}3&3&0&1\\0&4&4&2\\0&3&0&1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0&2&2\\0&0&0\\0&2&3\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}2&0&3\\1&1&4\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Ma tran A la dang bac thang ,cac ma tran B,C,D khong phai dang bac thang .

Ñònh nghóa : Ta goi A la co dang bac thang neu trong A cac hang toan so 0 (neu co) ñeu nam döôi cung. Trong hai hang khac 0, phan tö khac 0 ñau tien cua hang nam tren thì ô ve phía trai so vôi phan tö khac 0 ñau tien cua hang nam döôi.

Ñònh ly : Moi ma tran ñeu co the ñöa ve dang bac thang bang cac phep bien ñoi sô cap tren hang .

2. Hang cua ma tran

Ñònh nghóa 1 : Hang cua mot ma tran bac thang la so hang khac 0 cua no .
Trong ví du tren hang cua ma tran A la 3 . Ky hieu rank A = 3, hoac r (A) = 3.

<u>Ví du 1</u> Với $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$; $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

r (E) = 2 , r (F)= 2 , r (G)=3.

Ñònh nghóa 2: Cho A la mot ma tran bat ky rank A = rank $A^{/}$,vôi $A^{/}$ la ma tran bac thang nhan ñöôc tö ma tran A bang cac phep bien ñoi sô cap tren hang .

(Như vậy hạng không đổi nếu đổi chỗ các hàng của ma trận)

<u>Ví du 2:</u> Tìm hang cua ma tran H : $H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ ta ñöa ve dang bac thang

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3 - 4h_1]{h_2 - 2h_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_3 - h_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = H^{/}$$

r ($H^{/}$) = 2 vay r (H) = 2

Định lý 1*:** ***r (A) = r (A^T)

***Định lý 2* :** Hạng của một ma trận là *p* nghĩa là trong nó có ít nhất một định thức con khác 0 cấp p , mọi định thức con cấp lớn hơn *p* đều bằng 0 .

Mot so ví du:

$B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, r(B) = 2 ;

$C = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, r(C) = 2 ;

$G = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, r(G) = 2 ;

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, r(E) = 3 ;

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r(F) = 3.$$

Quy ước : Hạng của ma trân **0** bằng **0**.

Bai tap

5.1 Tìm hạng của các ma trận sau :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \; ; \; F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.2 Tìm hạng của các ma trận sau :

$$a)\begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad c)\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 & 9 \\ 2 & -6 & 8 & -2 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -9 & 4 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

5.3 Bien luan theo tham so m hang cua ma tran

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & m \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

---

§ 6 . *HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH*

1. Mot so khai niem

Ví dụ 1: Tìm x_1 , x_2 thỏa mãn : $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = -12 & (1) \\ 2x_1 + 5x_2 = 17 & (2) \end{cases}$ ñay la mot he phöông trình tuyen tính . Ta co the giai nhö sau :

(1) + (2) có $x_1 = 1$ thế vào (1) có $x_2 = 3$. Ta nói (1;3) là nghiệm duy nhất của hệ phương trình đã cho.

Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính là :

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...+ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...+ a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ...+ a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Hệ trên có *m* phương trình và *n* ẩn số . Nghiệm của hệ là các giá trị mà khi thay vào các vị trí của x_1 , x_2 , ..., x_n ta có *m* đẳng thức đều đúng.

Các số b_i gọi là các hệ số tự do.

Giải hệ phương trình là tìm tất cả các nghiệm của nó .

Quay lại ví dụ 1 : Ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ gọi là *ma trận hệ số* , ma trận $A|B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -12 \\ 2 & 5 & 17 \end{pmatrix}$ gọi là *ma trận hệ số mở rộng* của heô phương trình đã cho. Ta đặt ma trận $B = \begin{pmatrix} -12 \\ 17 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Ta có A.X = B , đây là *dạng ma trận* của hệ phương trình.

*** Hei thuain nhait**

Hei phöông trình thuain nhait lai hei coi ma train B = 0

<u>Ví dui 2 :</u>

Hei $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ lai hei thuain nhait.

Thay ngay $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ lai moit nghieim, nghieim nay goii lai nghieim taim thöôøng (ngoaii ra hei coøn coi thei coi nghieim khaic nöõa).

***Định lý* :**

- Nếu **r(A) = r (A|B) = n** thì hệ có một nghiệm duy nhất (*n* là số ẩn số).
- Nếu **r(A) = r (A|B) < n** thì hệ có vô số nghiệm .
- Nếu **r(A) < r (A|B)** thì hệ vô nghiệm.

<u>Ví dụ 3</u> *:* Cho hệ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 1 \\ -2x_1 - x_2 = 5 \end{cases}$, ta có :

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ r (A) = 2 ; $A|B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, r(A/B)=2 .

Vậy r(A) = r (A|B) = 2

n = 2 , hệ có một nghiệm duy nhất (x_1=6 , x_2= -17) .

Vídu 4 : Cho he : $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 1 \ (1) \\ 3x_1 + x_2 = 0 \ (2) \end{cases}$.

Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad r(A) = 1 \,;\; A/B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad r(A/B) = 2$$

Vay he vo nghiem .

Ví du 5: Giai he : $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 = 2 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad r(A) = 1 \quad A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad r(A/B) = 1.$$

He co vo so nghiem : (1 ; 0) , (-1 ; 1) , (-3 ; 2) ....

2. He phöông trình Cramer

Ñònh nghóa : He Cramer la he co ma tran he so A vuong (so an so bang vôi so phöông trình) va det A $\neq$ 0.

Ñònh ly : He Cramer co mot nghiem duy nhat tính theo cong thöc :

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}; x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}; \ldots\ldots; x_n = \frac{\det A_n}{\det A} \;;$$

ma tran A_i nhan ñöôc bang cach thay cot i bang cot B trong ma tran A.

Ví du 6: Giai he $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

Giai :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = -1 \quad ; \; A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_1 = -2$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_2 = 0 \quad ; \; A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_3 = -3$$

Vay nghiem duy nhat la $x_1 = 2 \;; x_2 = 0 \;;\; x_3 = 3$.

Löu y : Neu detA = 0 thì ta phai sö dung phöông phap khac ñe giai.

3. Phöông phap dung ma tran nghòch ñao

Ta ña biet he phöông trình co the viet döôi dang ma tran la : A .X = B nhan A^{-1} vao hai ve , ta được:

$$A^{-1}.A\ .\ X = A^{-1}\ .\ B \Leftrightarrow I.X = A^{-1}.B \Leftrightarrow X = A^{-1}.B.$$

Trôû lai ví dụ 6 , ta tính ñöôïc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$,

Ta co nghiem cua he la :

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

§7. PHÖÔNG PHAP GAUSS

Noi dung cua phöông phap Gauss:

Ñe tìm nghiem cua mot he phöông trình ta ñöôc phep :

- Ñoi cho hai phöông trình
- Nhan hai ve cua mot phöông trình vôi so khac 0
- Cong vao mot phöông trình k lan mot phöông trình khac .

Ba phep bien ñoi tren cho ta mot he môi töông ñöông vôi he cu (töc la hai he co nghiem giong nhau hoac cung vo nghiem).

Phöông phap Gauss (con goi la phöông phap khöi an lien tiep) tien hanh 3 phep bien ñoi tren (con goi la phep bien ñoi sô cap) ñoi vôi ma tran he so môû rong cua he phöông trình.

<u>Ví du 1</u> : Tìm nghiem cua he
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

<u>Giải</u>

Ta dung phöông phap Gauss ñöa ma tran ve dang bac thang:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_2-3h_3]{h_1-h_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_2-2h_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_3+h_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3 \leftrightarrow -h_2]{h_1 \leftrightarrow h_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ma tran nay la cua he
$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Vay nghiem cua he phöông trình ñau la $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 =1$.

<u>Ví du 2 :</u> Giai he
$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ 4x_1 + x_2 - 6x_3 = 4 \end{cases}$$

<u>Giai :</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3-4h_1]{h_2-2h_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_3-h_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad r(A)=2 \ , \ r(A|B)=3$$

Hang cuoi la phöông trình : $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$
Vay he nay la vo nghiem.

*** Khi xuat hien mot hang ma phan tö cuoi khac 0, cac phan tö con lai bang 0, ta ket luan : he vo nghiem .**

<u>Ví du 3 :</u> Giai he : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases}$

<u>Giai :</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3 \to h_3 - 3h_1]{h_2 \to h_2 - 2h_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_3 \to h_3 - 2h_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[h_2 \to (-h_2)]{h_1 \to h_1 + h_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Loai bo h_3 con lai : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ta co mot ma tran bac thang .

$r(A) = r(A|B) = 2 < n \quad n = 4$

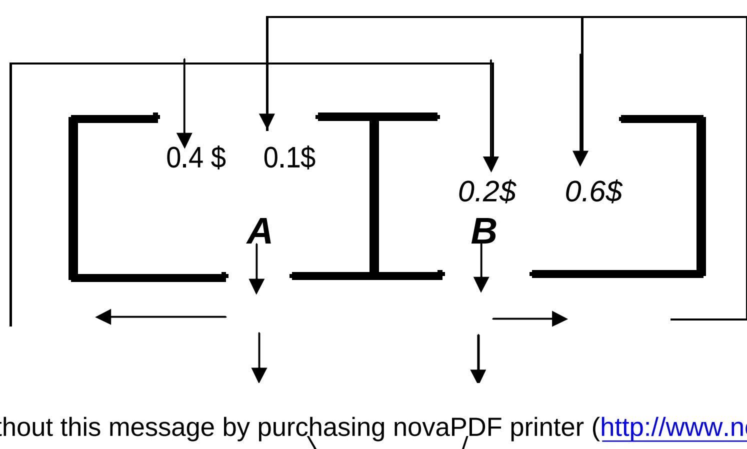
Cho $x_3 = t$; $x_4 = s$ (t, s la cac so thöc tuy y)

Suy ra : $x_1 = 3 - 2t - s$; $x_2 = 2 + 2t$ ñay la he nghiem tong quat cua he phöông trình ña cho .

*** He phöông trình co vo so nghiem (x_1, x_2 goi la an chính , so an chính bang ñung r(A), cac an con lai x_3, x_4 la an phu)**

§8. MO HÌNH INPUT - OUTPUT CUA LEONTIEF

Gia sö mot nen kinh te co hai nganh A va B. Ñe san xuat 1 $ hang loai A phai tieu ton 0,4 $ cua chính loai hang nay va 0,1 $ hang loai B. Töông tö : ñe lam ra 1 $ hang loai B phai sö dung 0,2 $ hang loai A va 0,6 $ hang loai B .



0.6$ 1$ 1$ 0.7$

0.4$ 0.3$

$$u = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.8 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

Nhö vay, neu nen kinh te tao ra 1 $ hang loai A va 1 $ hang loai B thì chæ co 0,4 $ hang loai A va 0,3 $ hang loai B cung öng cho nhu cau ben ngoai .

Ma tran $M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$ goi la ma tran Input-Output cua nen kinh te.

Neu tong gia trò san löông cua nen kinh te la $P = \begin{pmatrix} a\$ \\ b\$ \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \text{hang loai A} \\ \text{hang loai B} \end{matrix}$ goi tieu thu noi boi (internal use) la U thì **U = M.P =** $\begin{pmatrix} 0,4a\$ + 0,1b\$ \\ 0,2a\$ + 0,6b\$ \end{pmatrix}$ va neu goi D la phan cung öng cho nhu cau ben ngoai thì **D = P - U = P - M.P.**

D = IP - MP = (I - M)P $\Rightarrow$ P = (I - M)$^{-1}$D .

Ma tran (I- M) co ten la ma tran Leontief. Ta co :

San löông ñau ra = Ma tran Leontief nghòch x Nhu cau ben ngoai

Gia söû neu nen kinh te tren co nhu cau ben ngoai la :

$$D = \begin{pmatrix} 15\$ \\ 19\$ \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{hang A} \\ \text{hang B} \end{matrix}$$ thì P phai bang bao nhieu ?

$$P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 \end{pmatrix} \right]^{-1} . \begin{pmatrix} 15 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,1 \\ -0,2 & 0,4 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 15 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,82 & 0,36 \\ 0,91 & 2,73 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 15 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35,91\$ \\ 65,46\$ \end{pmatrix}$$

Mo hình Input - Output la cong trình cua V. Leontief (giai Nobel ve kinh te nam 1973). Khi phan tích nen kinh te My , ong ña chia ra thanh 6 nhom nganh va co mot ma tran Input - Output cap 6x6 .

Bai tap

8.1 Giai cac he phöông trình sau bang ca 3 phöông phap (Cramer, Gauss, dung ma tran nghòch ñao):

a) $\begin{cases} 3x+y=7 \\ 2x+y=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+4y=0 \\ x+5y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+y=3 \\ 5x+2y=-1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-3y=1 \\ 3x-9y=3 \end{cases}$

8.2 Giai cac he phöông trình sau bang phöông phap Gauss (sau ñoù la phöông phap Cramer neu ñöôc) :

a) $\begin{cases} x_1-3x_3=-2 \\ 3x_1+x_2-2x_3=5 \\ 2x_1+2x_2+x_3=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1+x_2-5x_3=3 \\ x_1-2x_3=1 \\ 2x_1-x_2-x_3=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1+5x_2+2x_3=1 \\ -x_1-4x_2+x_3=6 \\ x_1+3x_2-3x_3=-9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1+2x_2=4 \\ -x_1+3x_2+3x_3=-2 \\ x_2+x_3=0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x_2+5x_3=-4 \\ x_1+4x_2+3x_3=-2 \\ 2x_1+7x_2+x_3=-1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 5x_1-x_2+3x_3=0 \\ 4x_1-3x_2+7x_3=0 \end{cases}$

8.3 Giai cac he phöông trình : an so la x,y,z,u,v,w ...

a) $\begin{cases} x+y=-2z \\ 3x+4y=4 \\ 4x-8y=3z \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2x+2y+z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+w=1 \\ 2x+y+2z-2w=4 \\ 3x+y+4z+3w=7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 4x+y-6z=4 \\ x-3z=1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4x+12y-7z-20w=22 \\ 3x+9y-5z-28w=30 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-2y+z=-6 \\ 2x-3y=-7 \\ -x+3y-3z=11 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x+3y+12z=6 \\ x+y+4z=2 \\ 2x+5y+20z=10 \\ -x+2y+8z=4 \end{cases}$

8.4 Giai va bien luan theo m :

a) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=m \\ 2x_1-5x_2+x_3=2m-1 \\ x_2+x_3=m+1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y-z=2 \\ x+my-mz=2 \\ (1+m)x+2my-mz=3 \end{cases}$

8.5 Mot lang nho co 3 nganh san xuat : gao, vai , thòt, ñôn vò tien te la t. Ñe san xuat 1t gia trò gao, dan lang phai tieu ton 0,3 t gao ; 0,1 t vai va 0,2 t thòt. Ñe lam ra 1 t vai phai ton 0,2 t gao ; 0,2 t vai va 0,2 t thòt. Ñe san xuat 1 t thòt ton 0,4 t gao; 0,3 t vai va 0,1 t thòt .

a) Lap ma tran Input - Output cua nen kinh te .

b) Neu nam nay nha cai trò ñat möc giao nop cua lang la 15.000 t gao ; 8.000 t vai ; 9.000 t thòt thì dan lang phai san xuat ra moi loai hang gia trò san löông la bao nhieu ?

8.6 Mot nen kinh te co 2 nganh Y va Z, ñe lam ra 1 \$ san pham Z phai tieu ton 0,2\$ san pham Y va 0,3\$ san pham Z ; ñể lam ra 1\$ san pham Y phai tieu ton 0,4\$ san pham Y va 0,2\$ san pham Z. Neu nhu cau ben ngoai la 24.000\$ san pham Y va 19.000\$ san pham Z thì nen kinh te phai san xuat tong cong bao nhieu san pham Y , bao nhieu san pham Z ?

8.7 Tìm m ñe he phöông trình sau co mot nghiem duy nhat :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + mx_3 = 0 \end{cases}$$

8.8 Mot cöa hang the thao co mot lo hang 31 qua ta (gom cac loai 1kg , 2kg va 5 kg), tong trong löông can ñöôc 92 kg. Khach hang A ñong y mua toan bo lo hang vôi ñieu kien so qua ta loai 5kg khong qua 9 qua. Khach hang B ñong y mua toan bo lo hang vôi ñieu kien so qua ta 2 kg phai bang so qua ta 1 kg. Cöa hang co the thoa man yeu cau cua khach hang nao?